Mathematik

Abiturprüfung 2022

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

2 **1 a)** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

3 **b)** Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \dfrac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

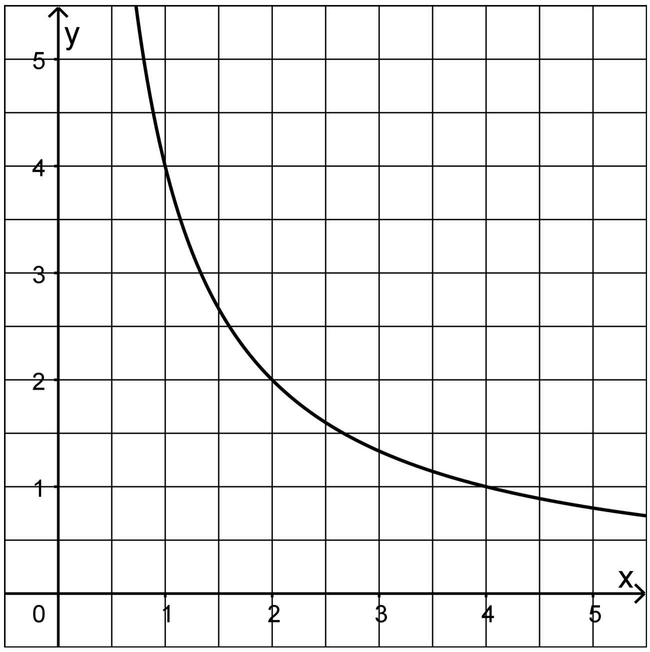


Abb. 1

2 **a)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)\,dx$.

3 **b)** Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

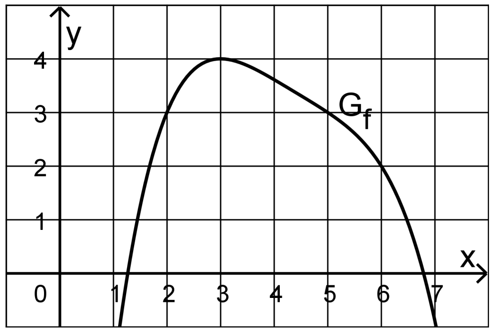


Abb. 2

2 **a)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

3 **b)** Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 **a)** Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

4 **b)** Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2x^2}{x^2-9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

2 **a)** Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

3 **b)** Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

2 Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

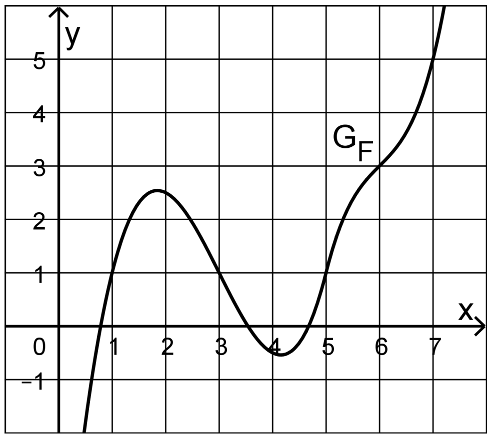


Abb. 1

2 **a)** Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$.

3 **b)** Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **3 a)** Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

3 **b)** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

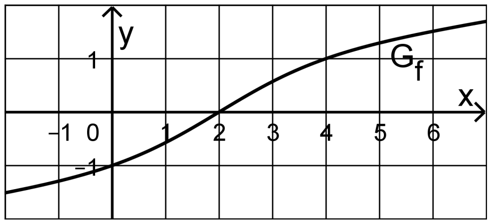


Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 **a)** Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

4 **b)** Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0 \mid f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

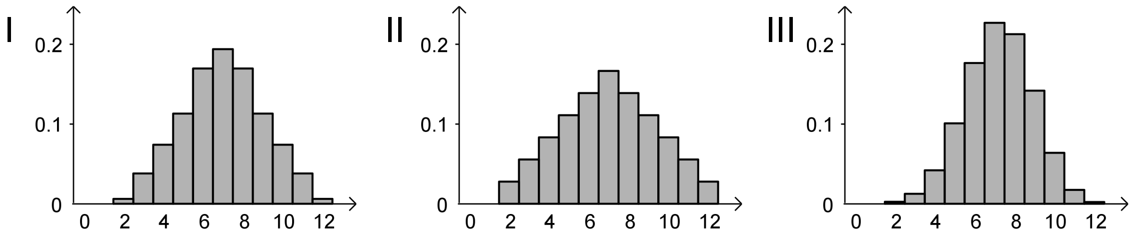
BE

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

2 **a)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt.

3 **b)** Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



5

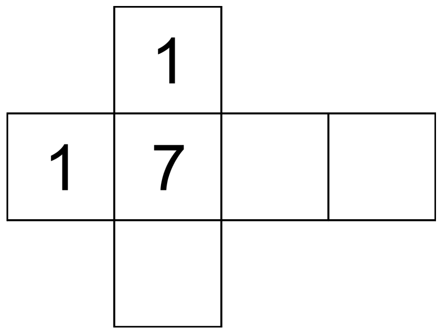
Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



2 **a)** Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

3 **b)** Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3\,|\,-6\,|\,5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

3 **a)** Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5\,|\,-4\,|\,1)$ auf K liegt.

2 **b)** Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2-Ebene schneidet.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

3 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

2 **b)** Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

5

Mathematik

Abiturprüfung 2022

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2\cdot\sqrt{10x-x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

2 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(zur Kontrolle: 0 und 10)

5 **b)** Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

(zur Kontrolle: $f'(x)=\frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$; y-Koordinate des Hochpunkts: 10)

3 **c)** Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

I $\quad f''(x)=\frac{50}{\left(x^2-10x\right)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$ $\qquad$ II $\quad f''(x)=\frac{50}{\left(10x-x^2\right)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$

5 **d)** Weisen Sie nach, dass für $0 \le x \le 5$ die Gleichung $f(5-x)=f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen. Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x=5$ ist.

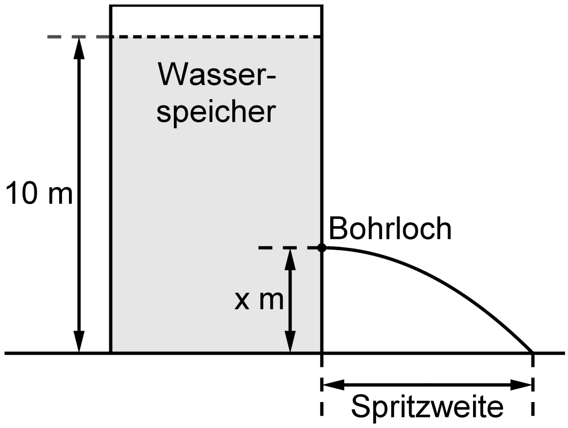
4 **e)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x)=\frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

4 **f)** Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

2 **g)** Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2\,|\,f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

5 **h)** Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s\,|\,0)$ mit $s \in \,]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x=5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.

(Fortsetzung nächste Seite)



Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.

1 **i)** Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3{,}6\,|\,9{,}6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

5 **j)** Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.

4 **k)** Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g: t \mapsto 0{,}25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.

Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

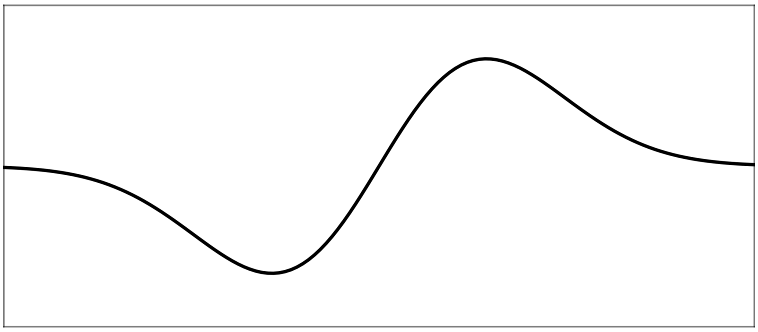


Abb. 1

4 **a)** Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an.

2 **b)** Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

5 **c)** Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

3 **d)** Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt bekanntlich $\int_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x) dx$.

3 **e)** Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt $F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x) dx$.

2 Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

3 **a)** Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **b)** Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an.

3 **c)** Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2:

- $f_a(0) = 0$
- $f'_a(0) = f'_0(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

3 **d)** Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.

II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

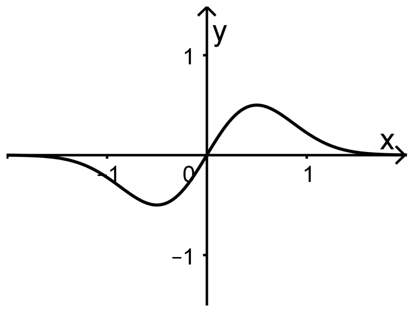


Abb. 2

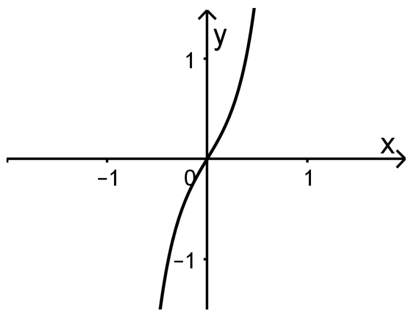


Abb. 3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

3 **e)** Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

3 **f)** Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

6 **g)** Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $\left(v \mid f_a(v)\right)$ des Graphen von f_a, der Punkt $\left(0 \mid \frac{2}{v}\right)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v \mid 0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5 % der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

1 Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0{,}05$.

6 **a)** Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen."
E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen."
E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall."

4 **b)** Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99 % beträgt.

4 **c)** Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.

3 **d)** Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen einen nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70 % der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.

Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen.

Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt.“
T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen.“

4 **a)** Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel.

(zur Kontrolle: $x = 13$)

4 **b)** Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\overline{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

1 Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24 % der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30 % der Befragten nicht.

Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

B: „Die Person kennt die Aktion ‚Baumpatenschaft‘.“
U: „Die Person kennt die Aktion ‚Umweltwoche‘.“

4 **a)** Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.

1 **b)** Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

2 Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3 € darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2 € ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.

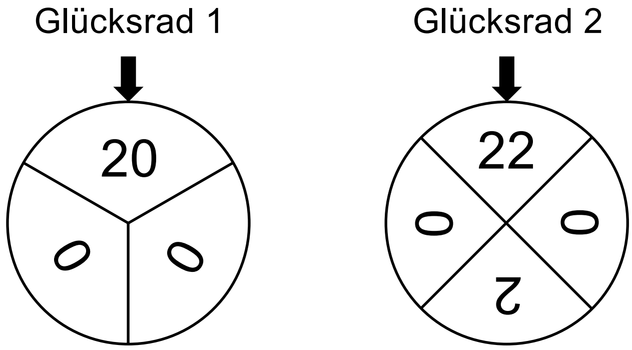


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **a)** Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

4 **b)** Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300 € beträgt.

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022".

4 **c)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlen muss.

3 **d)** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12 € ergeben.

3 Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_X besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

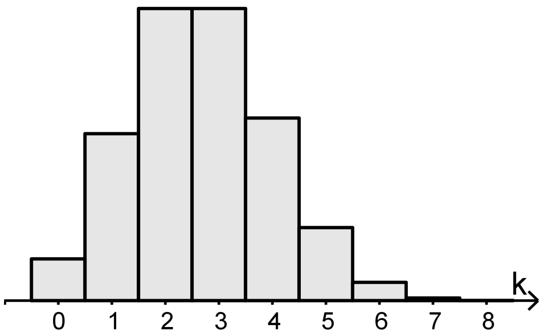


Abb. 2

4 **a)** Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_X.

2 **b)** Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_X$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 **a)** Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

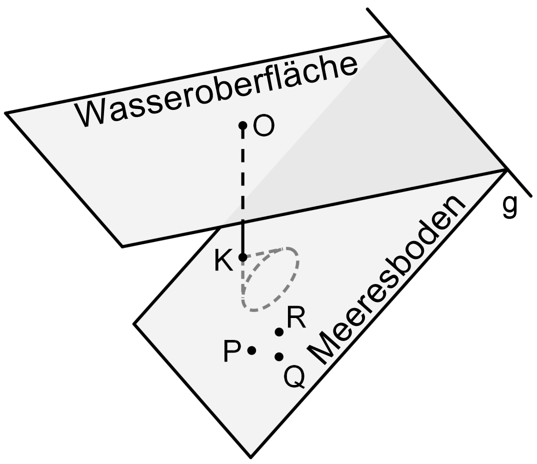
(zur Kontrolle: $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$)

5 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)

1 **c)** Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2-Ebene liegt.

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2-Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



3 **d)** Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt.

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

4 **e)** Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K dargestellt wird.

5 **f)** Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **g)** Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung).

Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.


Abb. 1

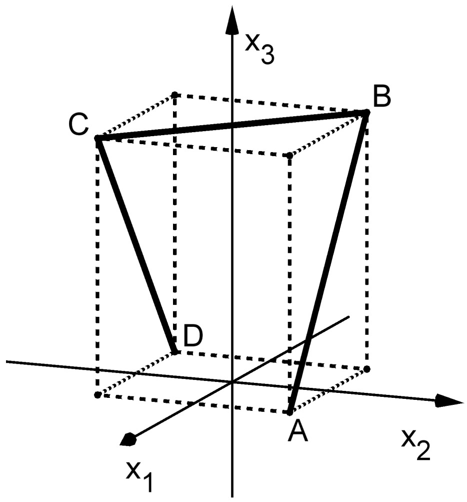


Abb. 2

2 **a)** Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen.

3 **b)** Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

4 **c)** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

5 **d)** Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

3 **e)** Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **f)** Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

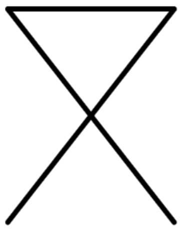


Abb. 3

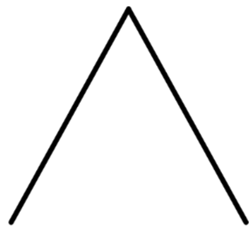


Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

4 **g)** Der Punkt $P(0\,|\,0\,|\,h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h:

I $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, \; t \in [0;1]$ II $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ III $\overline{PQ} = 28 - h$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

25