Mathematik

Abiturprüfung 2021

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

4 **1** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f.

3 **2 a)** Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

3 **b)** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

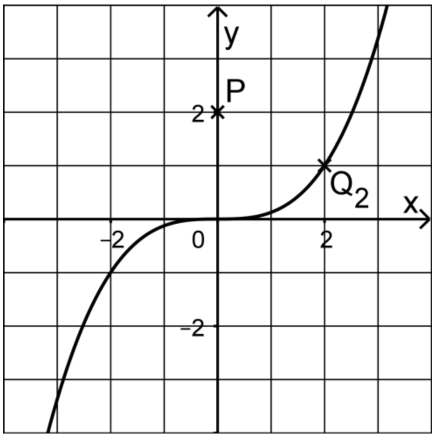
3 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

2 **a)** Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

3 **b)** Der Graph von f schließt mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a(a\,|\,f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0\,|\,2)$ und Q_2.



2 **a)** Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$)

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ und maximalem Definitionsbereich.

3 **a)** Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem.

3 **b)** Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_2^3 f(x)\,dx$.

2 Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

2 **a)** $W =]-\infty;1]$

2 **b)** $W =]3;+\infty[$

2 **3 a)** Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q(2\,|\,p(2))$.

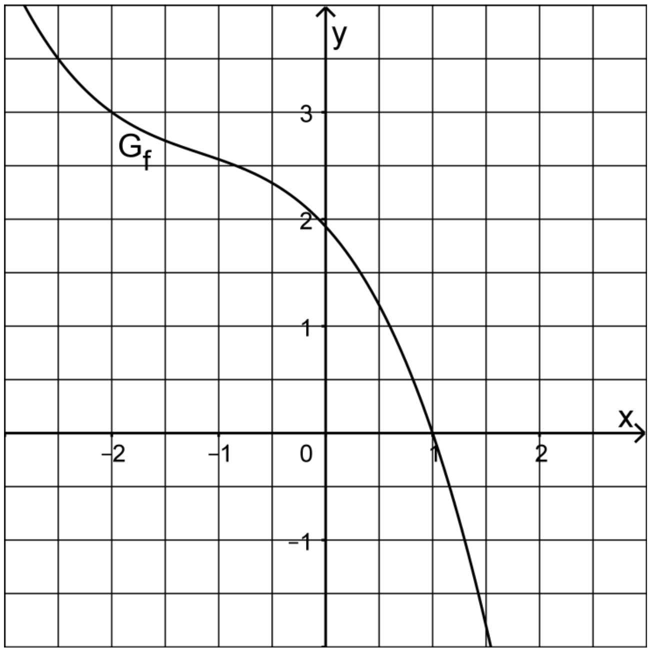
Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.

3 **b)** Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto ax^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1\,|\,0)$ die Tangente mit der Gleichung $y=-x+1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$.

Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.



2 **a)** Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.

3 **b)** Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X=0)=P(X=5)$, $P(X=1)=P(X=4)$ und $P(X=2)=P(X=3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

2 **a)** Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

3 **b)** Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben ist die Gerade $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie eine weitere Gerade h, welche parallel zu g ist und durch den Punkt $A(2\,|\,0\,|\,0)$ verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

4 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten von B.

(zur Kontrolle: $B(-2\,|\,3\,|\,2)$)

1 **b)** Berechnen Sie den Abstand von g und h.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

5 Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt $P(104\,|\,-42\,|\,10)$ beschrieben, seine Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der x_2x_3-Ebene liegt und den Mittelpunkt $M(0\,|\,0\,|\,20)$ sowie den Radius 3 hat.

Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

5

Mathematik

Abiturprüfung 2021

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2-4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

3 **a)** Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an. Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

5 **b)** Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ und $]2;+\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0\,|\,f(0))$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{6\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$)

Die Punkte $A(3\,|\,3{,}6)$ und $B(8\,|\,0{,}8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke $[AB]$.

4 **c)** Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \le x \le 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

5 **d)** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[AB]$ eingeschlossen wird.

2 Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c}: x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+c}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

1 **a)** Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

2 **b)** Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \ne 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

3 **c)** Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

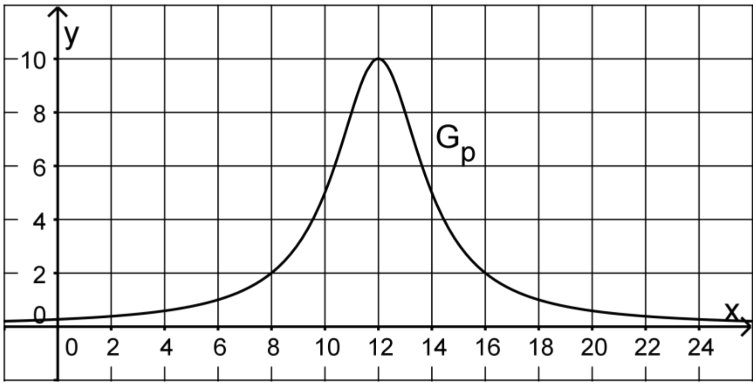
4 **d)** Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \ne 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \dfrac{40}{(x-12)^2+4}$;

die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



4 **a)** Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \dfrac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

2 **c)** Die Funktion p besitzt im Intervall $[4;12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

3 **d)** Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

Die in $[4;20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4;20]$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

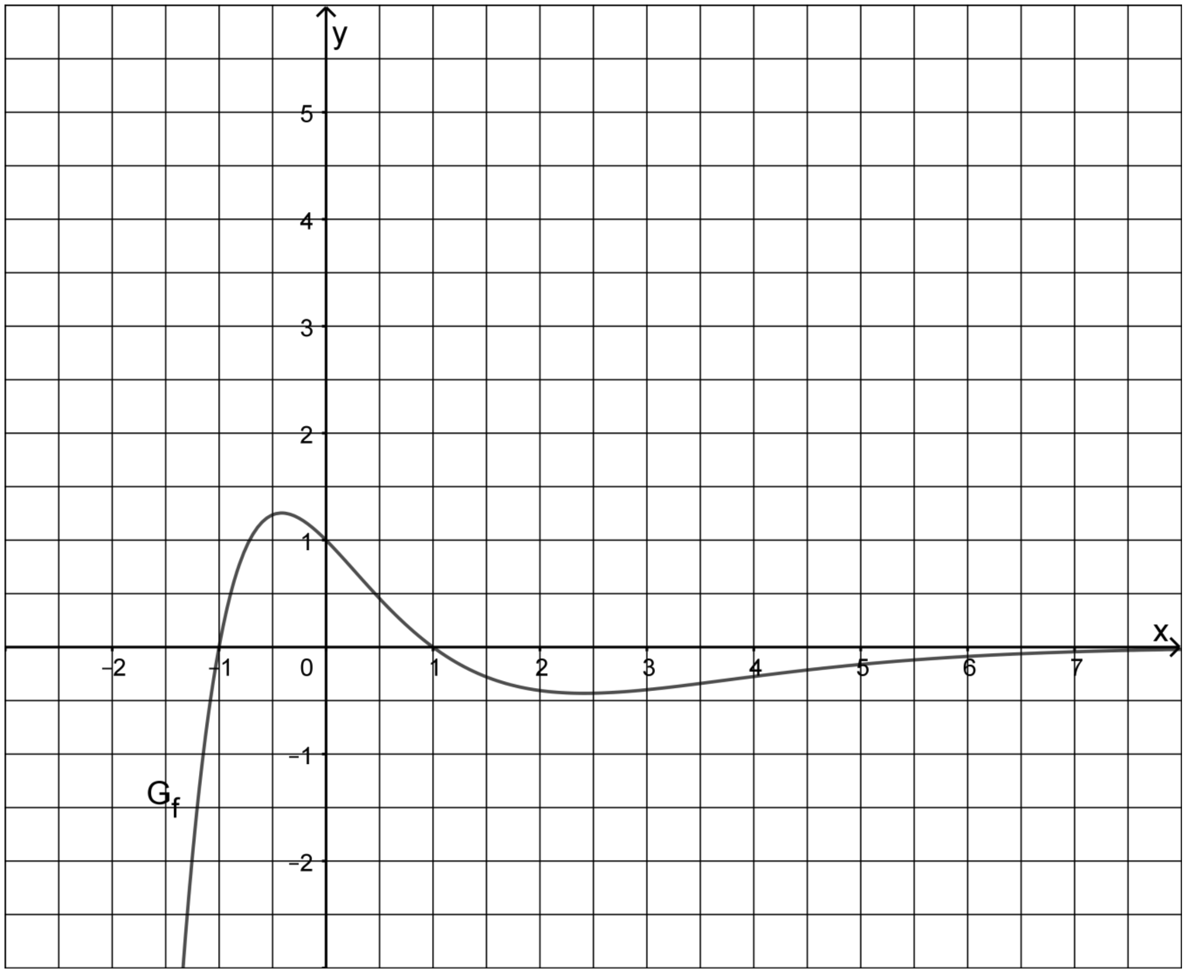
40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \left(1-x^2\right) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



2 **a)** Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot e^{-x}$)

4 **c)** Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

2 **d)** Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

3 **e)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3{,}5$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$ gilt.

2 **f)** Deuten Sie die Aussage $F(2{,}5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k : x \mapsto \left(1 - kx^2\right) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

2 **g)** Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.

3 **h)** Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.

2 **i)** Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen.

2 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

5 **a)** Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

(zur Kontrolle: $g'(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$)

3 **b)** Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \le x \le 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W\left(0 \,|\, g(0)\right)$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.

2 **c)** Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.

6 **d)** Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-\ln 3 \le x \le b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

3 **1** An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4};\ P(B) = \frac{6}{6^4}$$

2 Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15 % der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familie höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

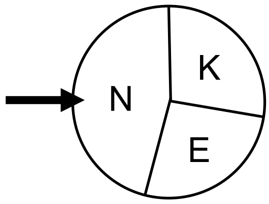
2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden.

2 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht.

5 **c)** Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % liegen.

(Fortsetzung nächste Seite)

6 **3** Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erzielt, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E.



4 Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

2 **a)** Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

2 **b)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat.

3 **c)** Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90 % ist.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

3 **1** Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

2 Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25 % beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.

2 **b)** Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\sum_{k=0}^{3}\left(0{,}75^k \cdot 0{,}25\right)$$

4 **c)** Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42 % der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63 % der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$.

2 **c)** Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1-P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

4 Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

3 **a)** Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X.

2 **b)** Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.

Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n)=n$ und $Var(Y_n)=n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5 % beträgt.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

4 **a)** Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

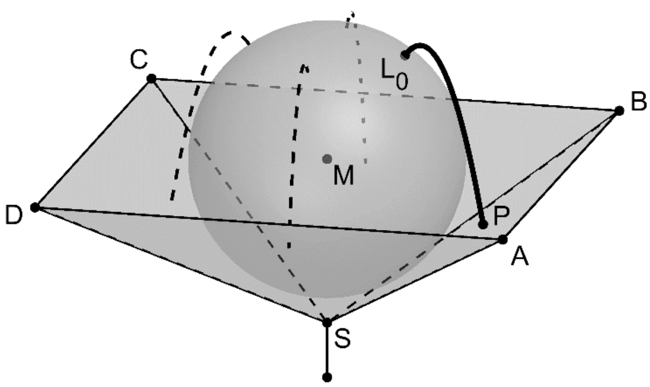
3 **b)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

2 **c)** Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide ABCDS.

(zur Kontrolle: $V = 72$)

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



4 **d)** Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)

2 **e)** Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0\left(1|1|6\right)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t\left(t+1|t+1|6{,}2-5\cdot\left(t-0{,}2\right)^2\right)$ mit geeigneten Werten $t\in\mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

4 **f)** Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

2 **g)** Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.

4 **h)** Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

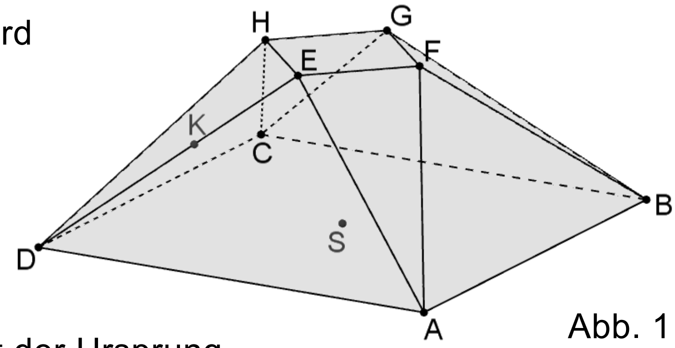


Abb. 1

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$. Der Mittelpunkt S des Quadrats ABCD ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene.

2 **a)** Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

4 **b)** Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

3 **c)** Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Auf der Strecke $[DE]$ gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

4 **d)** Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

4 **e)** $N(1{,}6|0|3{,}2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $[KF]$. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

4 **f)** Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide HDES hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.

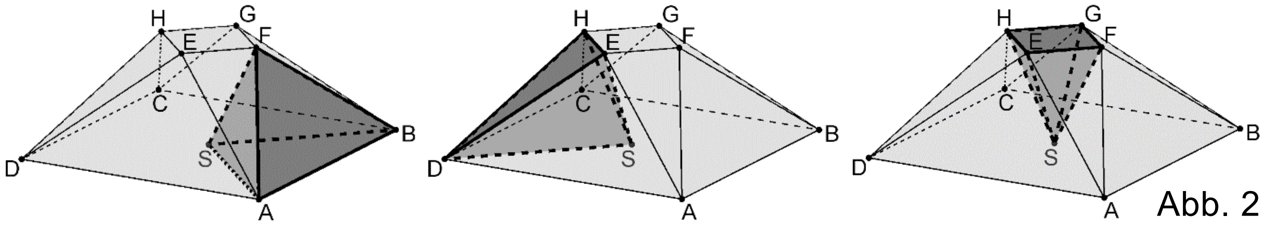


Abb. 2

4 **g)** Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

25