Mathematik

Abiturprüfung 2019

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

5 **1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

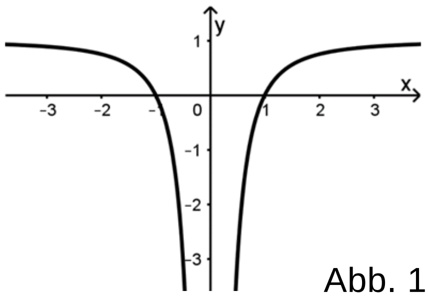


Abb. 1

1 **a)** Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

3 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

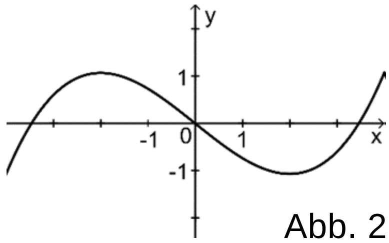


Abb. 2

3 **a)** Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

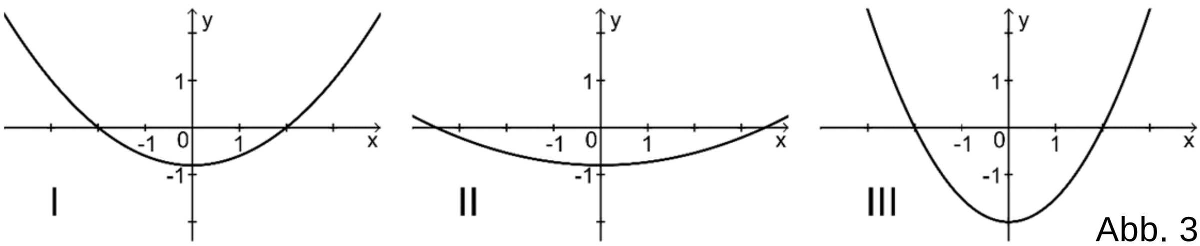


Abb. 3

2 **b)** Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **4 a)** Betrachtet wird eine Schar von Funktionen h_k mit $k \in \mathbb{R}^+$, die sich nur in ihren jeweiligen Definitionsbereichen D_k unterscheiden.
Es gilt $h_k\colon x \mapsto \cos x$ mit $D_k = [0; k]$.
Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion h_7. Geben Sie den größtmöglichen Wert von k an, sodass die zugehörige Funktion h_k umkehrbar ist. Zeichnen Sie für diesen Wert von k den Graphen der Umkehrfunktion von h_k in Abbildung 4 ein und berücksichtigen Sie dabei insbesondere den Schnittpunkt der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.

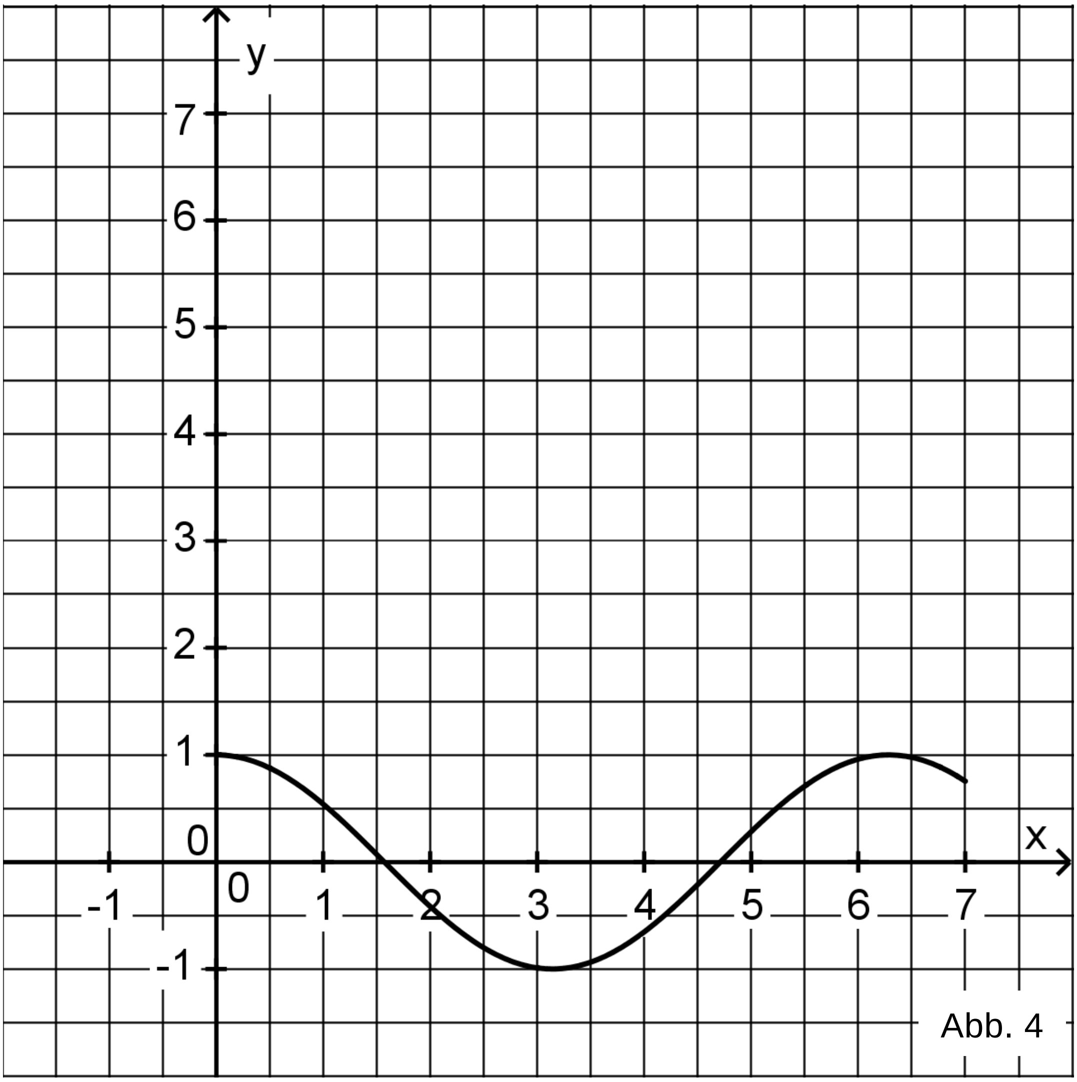


Abb. 4

2 **b)** Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto \sqrt{x+1} - 2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

1 **a)** Geben Sie D an.

4 **b)** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $\left(8 \mid g(8)\right)$.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

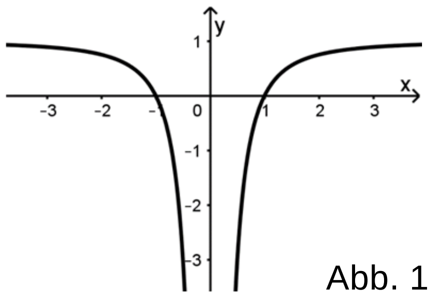


Abb. 1

1 **a)** Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

4 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

3 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k\colon x \mapsto kx^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

2 **a)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2 \mid -3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

3 **b)** Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

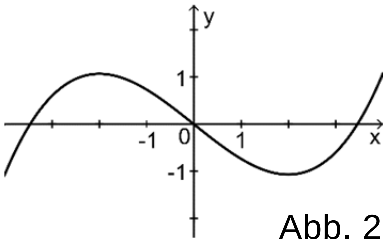


Abb. 2

3 **a)** Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

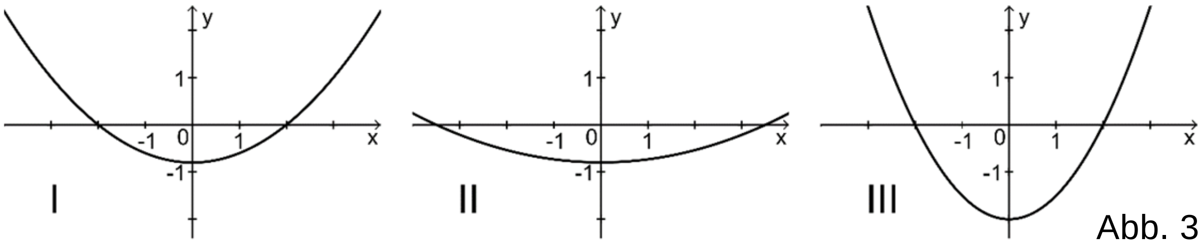


Abb. 3

2 **b)** Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

2 **a)** Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

3 **2** Die Zufallsgröße X kann ausschließlich die Werte 1, 4, 9 und 16 annehmen. Bekannt sind $P(X=9)=0{,}2$ und $P(X=16)=0{,}1$ sowie der Erwartungswert $E(X)=5$. Bestimmen Sie mithilfe eines Ansatzes für den Erwartungswert die Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ und $P(X=4)$.

2 **3** Gegeben ist eine Bernoullikette mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Erklären Sie, dass für alle $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ die Beziehung $B(n; p; k) = B(n; 1-p; n-k)$ gilt.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

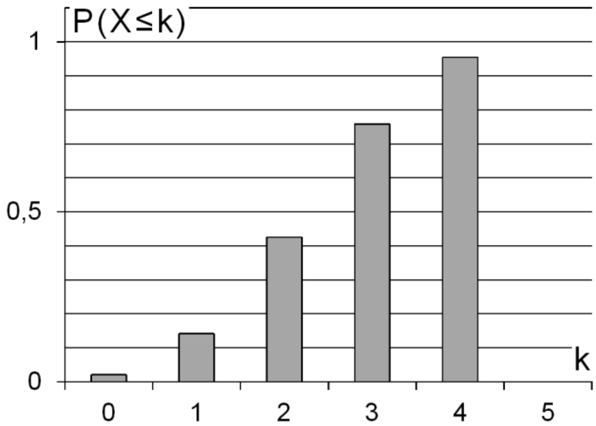
1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

2 **a)** Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

2 **2** Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in Abbildung 1 kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen. Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

Abb. 1



3 **3** Das Baumdiagramm in Abbildung 2 gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.

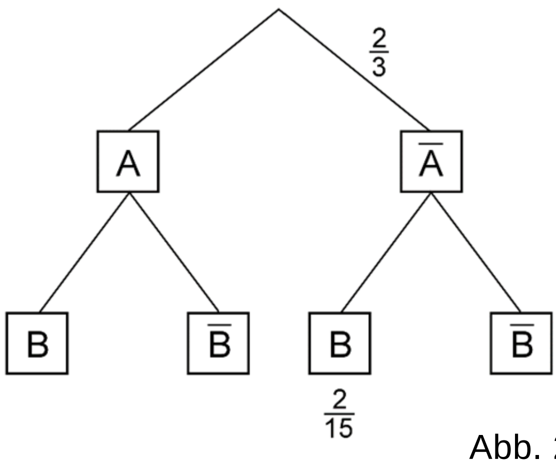


Abb. 2

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit den Eckpunkten $A(5\,|\,-4\,|\,-3)$, $B(5\,|\,4\,|\,3)$, $C(0\,|\,4\,|\,3)$ und D.

3 **a)** Ermitteln Sie die Koordinaten von D und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[AC]$ an.

2 **b)** Begründen Sie, dass die Dreiecke BCM und ABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen.

2 **2 a)** Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

3 **b)** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die beiden Kugeln k_1 mit Mittelpunkt $M_1(1|2|3)$ und Radius 5 sowie k_2 mit Mittelpunkt $M_2(-3|-2|1)$ und Radius 5.

2 **a)** Zeigen Sie, dass sich k_1 und k_2 schneiden.

3 **b)** Die Schnittfigur von k_1 und k_2 ist ein Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius dieses Kreises.

2 **2 a)** Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

3 **b)** Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2019

Prüfungsteil B

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 **1 a)** Zeigen Sie, dass $D_f =]1; +\infty[$ ist, und geben Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

2 **b)** Berechnen Sie die Nullstelle von f.

5 **c)** Beschreiben Sie, wie G_f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten von G_f.

4 **d)** Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $D_F =]1; +\infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

2 Abbildung 1 zeigt ein Hinderniselement in einem Skate-Park.

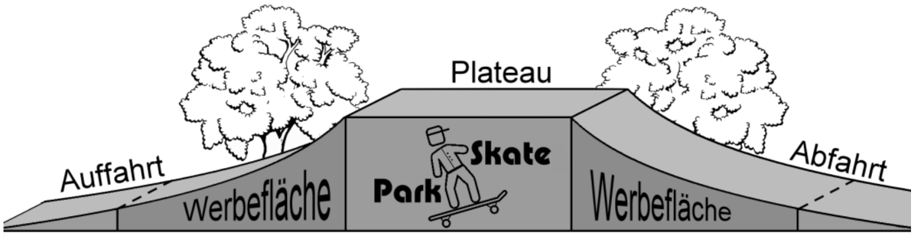


Abb. 1

Die Auffahrt des symmetrischen Hinderniselements geht in ein horizontal verlaufendes Plateau über, an das sich die Abfahrt anschließt. Die vordere und die hintere Seitenfläche verlaufen senkrecht zum horizontalen Untergrund. Um die vordere Seitenfläche mathematisch beschreiben zu können, wird ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, dass die x-Achse die untere Begrenzung und die y-Achse die Symmetrieachse der betrachteten Fläche darstellt. Das Plateau erstreckt sich im Modell im Bereich $-2 \le x \le 2$. Die Profillinie der Abfahrt wird für $2 \le x \le 8$ durch den Graphen der in Aufgabe 1 untersuchten Funktion f beschrieben (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

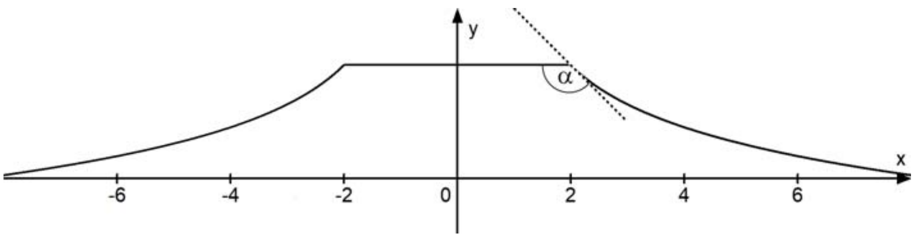


Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **a)** Erläutern Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f(2)$ im Sachzusammenhang und geben Sie den Term der Funktion q an, deren Graph G_q für $-8 \leq x \leq -2$ die Profillinie der Auffahrt im Modell beschreibt.

5 **b)** Berechnen Sie die Stelle x_m im Intervall $[2;8]$, an der die lokale Änderungsrate von f gleich der mittleren Änderungsrate in diesem Intervall ist.

3 **c)** Der in Aufgabe 2b rechnerisch ermittelte Wert x_m könnte alternativ auch ohne Rechnung näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 bestimmt werden. Erläutern Sie, wie Sie dabei vorgehen würden.

2 **d)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels α, den das Plateau und die Fahrbahn an der Kante zur Abfahrt einschließen (vgl. Abbildung 2).

3 **e)** Die vordere Seitenfläche des Hinderniselements wird in Teilbereichen der Auf- und Abfahrt als Werbefläche verwendet (vgl. Abbildung 1). Im Modell handelt es sich um zwei Flächenstücke, nämlich um die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $2 \leq x \leq 6$ sowie die dazu symmetrische Fläche im II. Quadranten. Berechnen Sie unter Verwendung der in Aufgabe 1d angegebenen Stammfunktion F, wie viele Quadratmeter als Werbefläche zur Verfügung stehen.

3 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k: x \mapsto kx^3 + 3 \cdot (k+1)x^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den zugehörigen Graphen G_k. Für jedes k besitzt der Graph G_k genau einen Wendepunkt W_k.

2 **a)** Geben Sie das Verhalten von g_k an den Grenzen des Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k an.

3 **b)** Bestimmen Sie die x-Koordinate von W_k in Abhängigkeit von k.

(zur Kontrolle: $x = -\frac{1}{k} - 1$)

4 **c)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der zugehörige Wendepunkt W_k auf der y-Achse liegt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Punkt W_k im Koordinatenursprung liegt und die Wendetangente, d. h. die Tangente an G_k im Punkt W_k, die Steigung 9 hat.

2 **d)** Für den in Aufgabe 3c bestimmten Wert von k zeigt Abbildung 3 (siehe nächste Seite) den zugehörigen Graphen mit seiner Wendetangente. In diesem Koordinatensystem sind die beiden Achsen unterschiedlich skaliert.

(Fortsetzung nächste Seite)

Bestimmen Sie die fehlenden Zahlenwerte an den Markierungsstrichen der y-Achse mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks an der Wendetangente und tragen Sie die Zahlenwerte in Abbildung 3 ein.

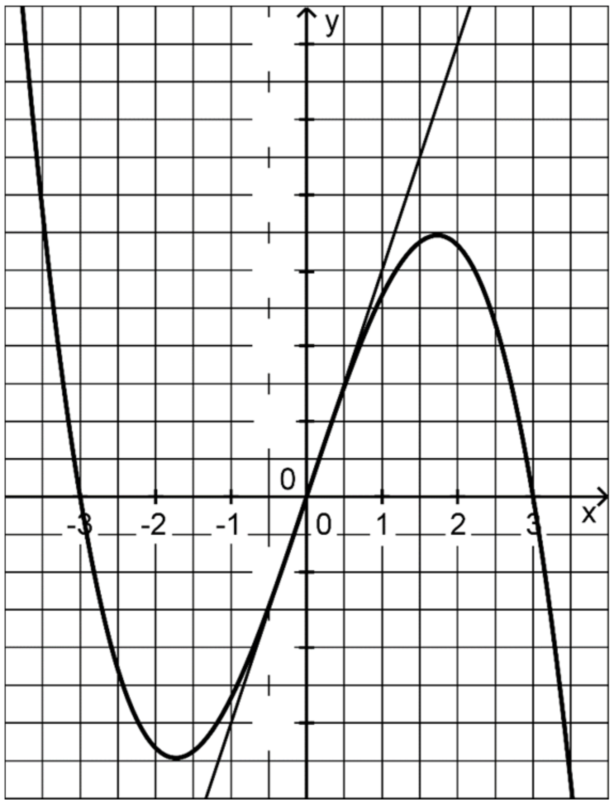


Abb. 3

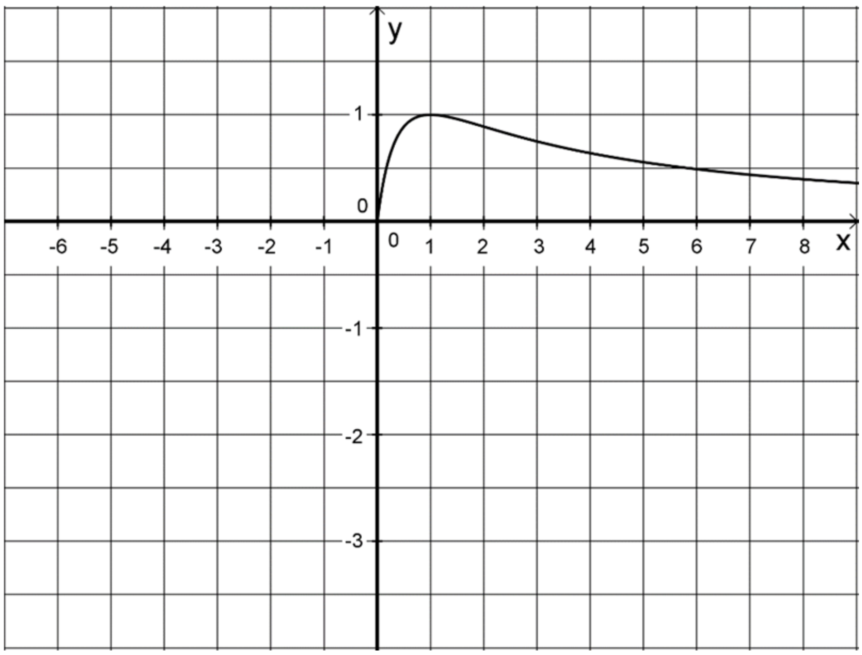
40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{(x+1)^2}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen G_f von f im I. Quadranten.



3 **a)** Begründen Sie, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist. Geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an und begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ als waagrechte Asymptote besitzt.

5 **b)** Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

4 **c)** Begründen Sie, dass G_f für $x < 0$ nur im III. Quadranten verläuft, und zeichnen Sie in die Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f ein. Berechnen Sie dazu $f(-3)$ und drei weitere geeignete Funktionswerte von f.

3 **d)** Gegeben ist ferner die in $]-1;+\infty[$ definierte Funktion
$F: x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1}$.
Zeigen Sie, dass F für $x > -1$ eine Stammfunktion von f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein Pharmaunternehmen führt eine Studie zur Wirksamkeit und Verträglichkeit eines neu entwickelten Medikaments durch. Wenn das Medikament einmalig in Form einer Tablette eingenommen wird, kann die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten modellhaft durch die betrachtete Funktion f für $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden seit der Einnahme der Tablette und $f(x)$ für die Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten (im Weiteren kurz als Wirkstoffkonzentration bezeichnet) in Milligramm pro Liter ($\frac{mg}{l}$).
Die folgenden Aufgaben e bis i sollen auf der Grundlage dieses Modells bearbeitet werden.

2 **e)** Berechnen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme der Tablette und geben Sie die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration an.

3 **f)** An der Stelle $x = 2$ hat G_f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang an.

In der Pharmakologie wird das in positive x-Richtung unbegrenzte Flächenstück, das sich im I. Quadranten zwischen G_f und der x-Achse befindet, als AUC („area under the curve“) bezeichnet. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben.

4 **g)** Die x-Achse, G_f und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(b)$ ein. Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe d angegebenen Stammfunktion F einen Term für $A(b)$ und beurteilen Sie unter Verwendung dieses Terms, ob die Funktion f auch für große Zeitwerte eine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration darstellt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Das Medikament zeigt die gewünschte Wirkung erst ab einer bestimmten Wirkstoffkonzentration. Daher soll der Patient nach der ersten Tablette des Medikaments eine zweite identisch wirkende Tablette einnehmen, noch bevor die Konzentration des Wirkstoffs im Blut unter $0{,}75\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ fällt. Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

4 **h)** Ermitteln Sie durch Rechnung den spätesten Zeitpunkt, zu dem die zweite Tablette eingenommen werden soll.

3 **i)** Wird die zweite Tablette zweieinhalb Stunden nach der ersten Tablette eingenommen, so kann die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2{,}5;\, 9]$ mit einem der folgenden Terme beschrieben werden. Wählen Sie den passenden Term aus und begründen Sie Ihre Wahl.

(A) $f(x)+f(x+2{,}5)$
(B) $f(x)+f(x-2{,}5)$
(C) $f(x-2{,}5)+f(2{,}5)$
(D) $f(x)-f(x-2{,}5)$

Verabreicht man das Medikament nicht in Form von Tabletten, sondern mittels einer Dauerinfusion, so wird der Wirkstoff langsam und kontinuierlich zugeführt. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1{,}5$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration während einer Dauerinfusion. Dabei ist x die seit Anlegen der Dauerinfusion vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die Wirkstoffkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

4 **j)** Begründen Sie, dass der Graph von k streng monoton steigend ist.

(zur Kontrolle: $k'(x) = \frac{6e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$)

5 **k)** Bei Dauerinfusionen dieses Medikaments muss die Wirkstoffkonzentration spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0{,}75\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ sein und stets mindestens 25 % unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ liegen. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$ und beurteilen Sie beispielsweise unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, ob gemäß der Modellierung diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff, das Platz für 60 Fahrgäste bietet.

3 **1** Betrachtet wird eine Fahrt, bei der das Schiff voll besetzt ist. Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene, Jugendliche und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Jugendlichen und Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Erwachsene an der Fahrt teilnehmen.

2 Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen, ohne dabei schon den Fahrpreis bezahlen zu müssen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 zur Verfügung stehenden Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen. Vereinfachend soll angenommen werden, dass X binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt. Die auf der nächsten Seite abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

1 **a)** Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei der Annahme, die Zufallsgröße X ist binomialverteilt, im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

3 **c)** Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, höchstens ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der für eine Fahrt möglichen Reservierungen nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

5 **d)** Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **e)** Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 **f)** Beschreiben Sie den zugehörigen Fehler zweiter Art sowie die daraus resultierende Konsequenz im Sachzusammenhang.

20

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$

n	k	p = 0,10	p = 0,11	p = 0,12	p = 0,13	p = 0,14	p = 0,15	p = 0,16	p = 0,17
64	0	0,00118	0,00058	0,00028	0,00013	0,00006	0,00003	0,00001	0,00001
	1	0,00956	0,00514	0,00272	0,00142	0,00073	0,00037	0,00019	0,00009
	2	0,03891	0,02290	0,01321	0,00748	0,00417	0,00228	0,00123	0,00065
	3	0,10629	0,06827	0,04277	0,02620	0,01572	0,00924	0,00533	0,00302
	4	0,22047	0,15377	0,10425	0,06886	0,04439	0,02797	0,01725	0,01043
	5	0,37271	0,28059	0,20485	0,14534	0,10040	0,06763	0,04450	0,02863
	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

2 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Besuchern höchstens ein Besucher ein Lebkuchenherz trägt.

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} B\left(25; \frac{1}{6}; i\right)$ berechnet werden kann.

4 **c)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

5 **2** Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“, „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Die Inhaberin der Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.

5 **a)** Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10 %.

2 **b)** Der Angestellte konnte bei der Durchführung des Tests zehn von 100 erwachsenen Besuchern dazu animieren, Lose zu kaufen. Er behauptet, dass er zumindest bei Personen mit Kind eine Erfolgsquote größer als 10 % habe. Unter den 100 angesprochenen Besuchern befanden sich 40 Personen mit Kind. Von den Personen ohne Kind zogen 54 kein Los. Überprüfen Sie, ob das Ergebnis der Stichprobe die Behauptung des Angestellten stützt.

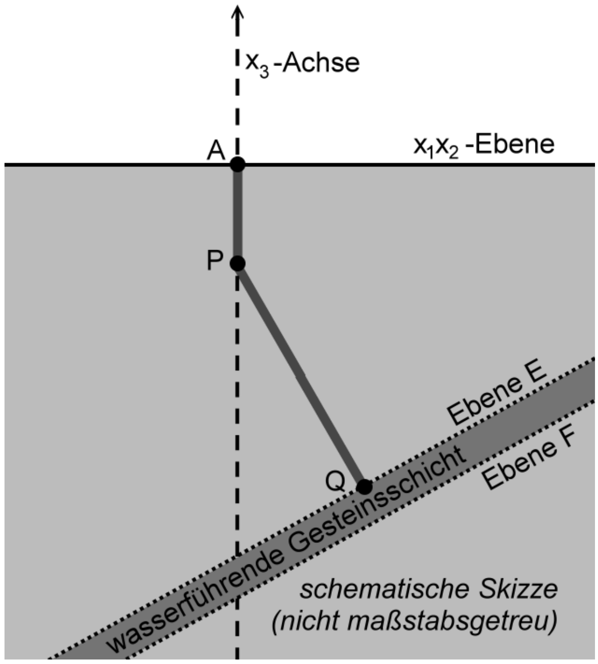
20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $P(0|0|-1)$ und $Q(1|1|-3{,}5)$ beschrieben werden (vgl. Abbildung).



2 **a)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

3 **b)** Beim Übergang zwischen den beiden Abschnitten des Bohrkanals muss die Bohrrichtung um den Winkel geändert werden, der im Modell durch den Schnittwinkel der beiden Geraden AP und PQ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene E und die untere Begrenzungsfläche in einer zu E parallelen Ebene F. Die Ebene E enthält den Punkt Q. Die Strecke $[PQ]$ steht senkrecht auf der Ebene E (vgl. Abbildung).

2 **c)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$)

6 **d)** Der Bohrkanal wird geradlinig verlängert und verlässt die wasserführende Gesteinsschicht in einer Tiefe von 3600 m unter der Erdoberfläche. Die Austrittsstelle wird im Modell als Punkt R auf der Geraden PQ beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von R und ermitteln Sie die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht auf Meter gerundet.

(zur Kontrolle: x_1- und x_2-Koordinate von R: 1,04)

(Fortsetzung nächste Seite)

Ein zweiter Bohrkanal wird benötigt, durch den das entnommene Wasser abgekühlt zurück in die wasserführende Gesteinsschicht geleitet wird. Der Bohrkanal soll geradlinig und senkrecht zur Erdoberfläche verlaufen. Für den Beginn des Bohrkanals an der Erdoberfläche kommen nur Bohrstellen in Betracht, die im Modell durch einen Punkt $B(t \mid -t \mid 0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden können.

3 **e)** Zeigen Sie rechnerisch, dass der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht im Modell im Punkt $T(t \mid -t \mid -4{,}3)$ erreicht, und erläutern Sie, wie die Länge des zweiten Bohrkanals bis zur wasserführenden Gesteinsschicht von der Lage der zugehörigen Bohrstelle beeinflusst wird.

4 **f)** Aus energetischen Gründen soll der Abstand der beiden Stellen, an denen die beiden Bohrkanäle auf die wasserführende Gesteinsschicht treffen, mindestens 1500 m betragen. Entscheiden Sie auf der Grundlage des Modells, ob diese Bedingung für jeden möglichen zweiten Bohrkanal erfüllt wird.

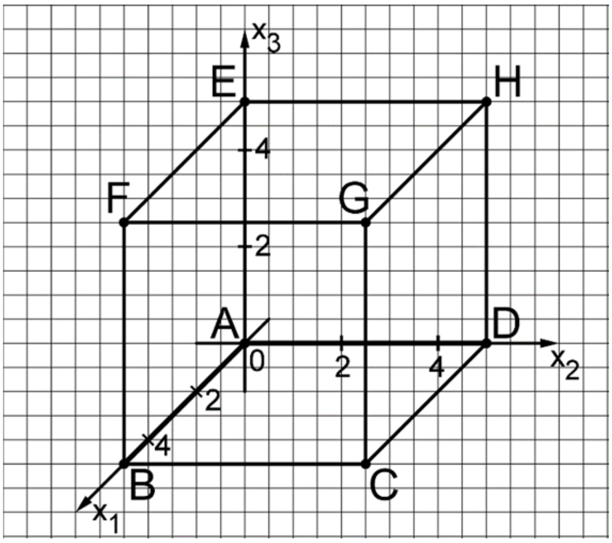
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



4 **a)** Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

3 **b)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform.

(zur Kontrolle: $T:\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade $g_a:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

3 **c)** Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche CDHG in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$.

2 **d)** Ein beliebiger Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **e)** Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

4 **f)** Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.

20