# Abiturprüfung 2006

## MATHEMATIK

als Grundkursfach

**Arbeitszeit: 180 Minuten**

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

**Die Angabe ist vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.**

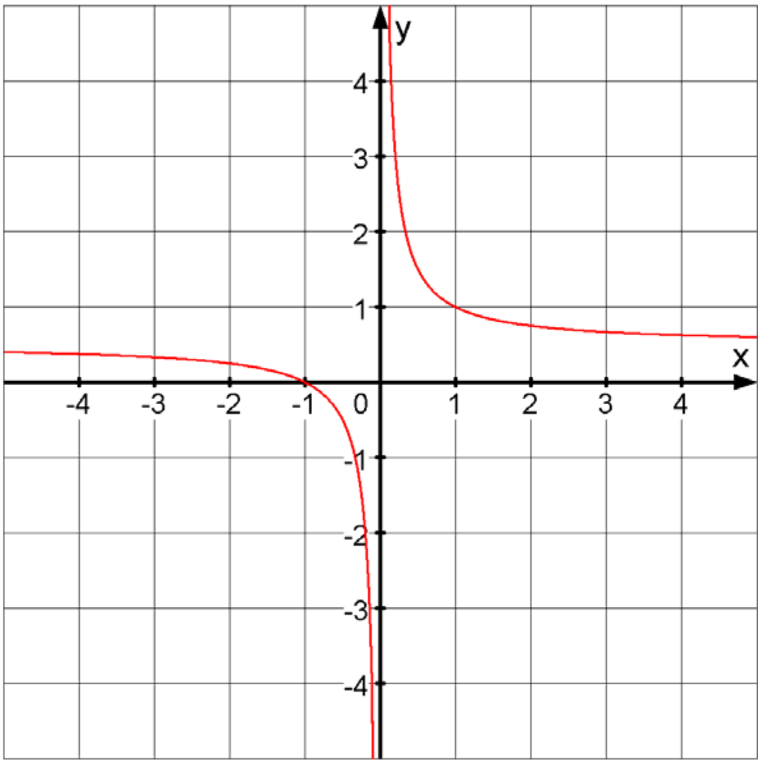
**Name:**____________________________

## GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

| BE | I. |
|---|---|
| | Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ einer rationalen Funktion f der Form $f(x) = \frac{x+a}{bx}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. |
| 2 | a) Einziger Schnittpunkt von $G_f$ mit der x-Achse ist $A(-1 \mid 0)$, außerdem verläuft $G_f$ durch den Punkt $B(1 \mid 1)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f. <br> [Ergebnis: $f(x) = \frac{x+1}{2x}$] |
| | Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \ln f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ mit maximalem Definitionsbereich $D_g$. Ihr Graph wird mit $G_g$ bezeichnet. |
| 7 | b) Begründen Sie anhand des Verlaufs von $G_f$, dass gilt: $D_g = \mathbb{R} \setminus [-1;0]$. Untersuchen Sie das Verhalten von $G_g$ an den Rändern von $D_g$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_g$ an. |
| 7 | c) Ermitteln Sie die Nullstelle von g und untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Monotonieverhalten von g. <br> [Zur Kontrolle: $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$] |
| 9 | d) Bestimmen Sie die Stelle $x_0$, an der die Funktionen f und g in der ersten Ableitung übereinstimmen. <br> Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an $G_f$ in $P(x_0 \mid f(x_0))$ sowie die Gleichung der Tangente an $G_g$ in $Q(x_0 \mid g(x_0))$. <br> Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente in P. <br> [Ergebnis für die Gleichung der Tangente in P: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$] |
| 7 | e) Berechnen Sie $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0{,}1)$ und $g(4)$. Zeichnen Sie den Graphen $G_g$ sowie seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in die nebenstehende Abbildung ein. Tragen Sie auch die Tangenten in P und Q ein. |

(Fortsetzung nächste Seite)

| BE | |
|---|---|
| | Die Funktion $G: x \mapsto x \cdot g(x) + \ln(x+1)$ ist für $x > 0$ eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). |
| 8 | f) Die Tangenten in P und Q schließen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ ein Parallelogramm ein. Der Graph von g teilt dieses Parallelogramm in zwei Teilflächen. Wie viel Prozent der Parallelogrammfläche nimmt die Teilfläche unterhalb von $G_g$ ein? |
| 40 | |




**Name:**........................................
(vom Prüfling einzutragen)

BE

## II.

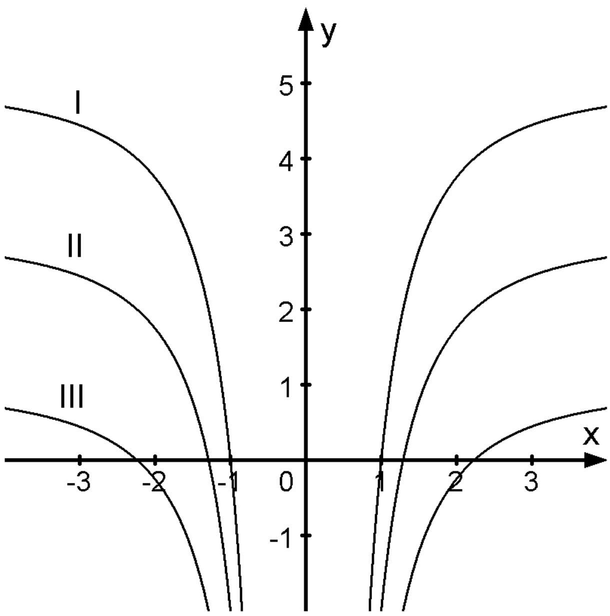
Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{ax^2 - 5}{x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von $f_a$ wird mit $G_a$ bezeichnet.

3 1. a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von $G_a$ und die zwei Nullstellen von $f_a$. [Teilergebnis: $x_1 = \sqrt{\frac{5}{a}}$ ]

3 b) Begründen Sie, dass $y = a$ Asymptote von $G_a$ ist. Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a$ an der Definitionslücke.

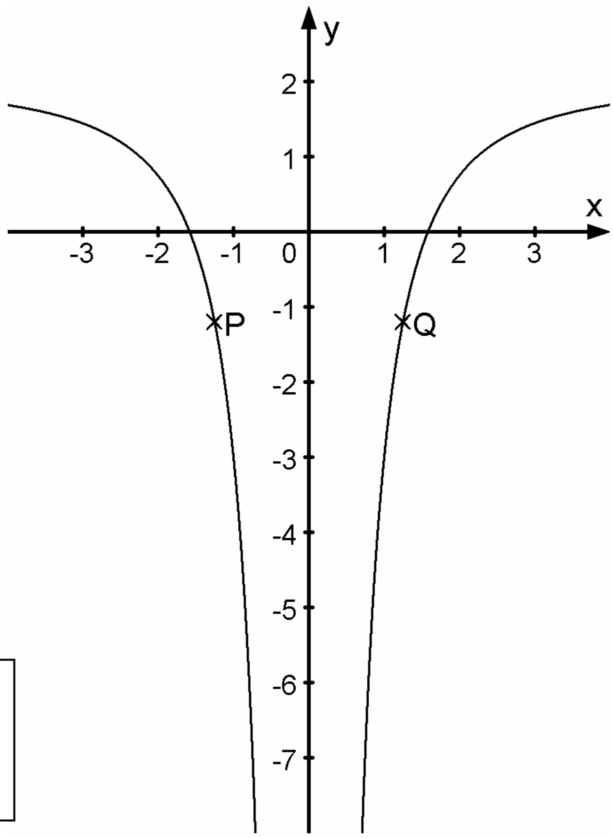
5 c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $f_a$.
[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = \frac{10}{x^3}$ ]

5 d) Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu *ganzzahligen* Parameterwerten a. Geben Sie an, zu welchem a die Graphen I, II und III jeweils gehören, und begründen Sie Ihre Entscheidung.




(Fortsetzung nächste Seite)

| BE | |
|---|---|
| 2 | 2. a) Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die positive Nullstelle von $f_a$ kleiner als 2,5 ist. Für diese Parameterwerte a schließen der Graph $G_a$, die Koordinatenachsen, die Asymptote $y = a$ und die Gerade $x = 2{,}5$ im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt $A_a$ ein. |
| 3 | b) Markieren Sie diese Fläche für einen der Graphen in der Abbildung von Aufgabe 1d. Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt $A_a$ gilt: $A_a = 2{,}5a - \int_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} f_a(x)\,dx$. |
| 6 | c) Zeigen Sie: $A_a = 2\sqrt{5a} - 2$ (Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Term der Funktion $f_a$ als Differenz darzustellen.) |
| 4 | d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Parameterwerte $a_1$ und $a_2$ an, so dass sich die Flächeninhalte $A_{a_1}$ und $A_{a_2}$ um $2\sqrt{5}$ unterscheiden. |
| 9 | 3. Nun sei $a = 2$. Die nebenstehende Abbildung zeigt den zugehörigen Graphen $G_2$. Die Tangenten an $G_2$ in den Kurvenpunkten $P(-1{,}25 \mid -1{,}2)$ und $Q(1{,}25 \mid -1{,}2)$ schließen mit der Asymptote $y = 2$ ein Dreieck ein. Skizzieren Sie das Dreieck in die nebenstehende Abbildung und berechnen Sie seinen exakten Flächeninhalt. |
| 40 | |




**Name:**........................................
(vom Prüfling einzutragen)

## GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

### III.

Ein in die Jahre gekommenes Fotokopiergerät liefert brauchbare und unbrauchbare Kopien. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kopie unbrauchbar ist, beträgt 15 % (Ausschussquote). Das Fertigen von Kopien soll als Bernoulli-Kette angesehen werden.

8 1. Es werden 20 Kopien gefertigt. Ermitteln Sie für jedes der drei angegebenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.

A: Es sind mehr als drei Viertel der Kopien brauchbar.

B: Es ist genau eine Kopie unbrauchbar und diese befindet sich unter den letzten fünf.

C: Von den Kopien sind genau drei unbrauchbar und diese folgen unmittelbar hintereinander.

4 2. Es werden n Kopien gefertigt. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Kopien brauchbar sind, kleiner als 10 %?

4 3. Von einem einseitigen Rundschreiben werden 170 brauchbare Kopien benötigt. Eine Sekretärin, der die Ausschussquote von 15 % bekannt ist, fertigt zur Sicherheit gleich 200 Kopien. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie trotzdem weniger als die gewünschte Zahl von brauchbaren Kopien?

7 4. Die unbrauchbaren Kopien entstehen im vorliegenden Fall dadurch, dass das Papier zerknittert oder das Druckbild fehlerhaft ist. Um zu klären, ob die beiden Ereignisse „Eine Kopie ist zerknittert“ und „Das Druckbild ist fehlerhaft“ unabhängig sind, werden die nächsten 1000 Kopien untersucht. 154 davon sind unbrauchbar, wobei 66 Kopien zerknittert sind und bei 115 das Druckbild fehlerhaft ist.
Welche Vermutung hinsichtlich der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse lassen diese Werte zu? Die Antwort ist zu begründen.

(Hinweis: Die relativen Häufigkeiten können als brauchbare Näherungswerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.)

6 5. Ein Student fertigt von einem zehnseitigen Vorlesungsskript eine Kopie bestehend aus zehn einseitig bedruckten Blättern an. Er heftet diese zehn Blätter aus Versehen in falscher Reihenfolge zusammen.
Wie viele „falsche Reihenfolgen“ sind insgesamt möglich? Bei wie vielen davon ist die richtige Reihenfolge dadurch wieder herzustellen, dass genau zwei Blätter vertauscht werden?

(Fortsetzung nächste Seite)

| BE | |
|---|---|
| 6 | 6. a) Das Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 4 % beträgt. Um diese Behauptung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5 % zu testen, werden 200 Kopien angefertigt. Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel. |
| 2 | b) Bei dem Test erweisen sich 13 Kopien als unbrauchbar. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe 6a entworfenen Tests. |
| 3 | 7. Die eingangs genannte Modellannahme, das Anfertigen von Kopien sei eine Bernoulli-Kette, kann in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand eines Beispiels. |
| 40 | |

BE

**IV.**

1. Für eine Fernseh-Quizshow werden 10 Kandidaten benötigt. Da von den eingeladenen Kandidaten erfahrungsgemäß im Mittel 5 % nicht erscheinen, werden zu jeder Show 12 Personen eingeladen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen

3 a) genau 10 Personen,

5 b) weniger als 10 Personen?

3 2. Zu Beginn der Show müssen vier Berge ihrer (verschiedenen) Höhe nach aufsteigend geordnet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die richtige Reihenfolge durch reines Raten zu erhalten?

3. Einem Kandidaten werden der Reihe nach Fragen gestellt, wobei er aus jeweils vier Antworten die einzig richtige herausfinden muss. Wird die erste Frage richtig beantwortet, so hat der Kandidat 125 € auf seinem Gewinnkonto. Mit jeder weiteren richtigen Antwort verdoppelt sich der Betrag auf seinem Gewinnkonto bis zu einer maximalen Höhe von 256 000 €. Bei einer falschen Antwort scheidet der Kandidat *mit dem bis dahin erreichten Gewinn* aus.

5 a) Ein Kandidat hat bereits die ersten drei Fragen richtig beantwortet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er durch reines Raten einen Gewinn von mindestens 16 000 €?

Nach Erreichen der Gewinnstufe von 64 000 € steht der 50-50-Joker zur Verfügung, der nur einmal verwendet werden darf. Bei diesem werden zufällig zwei falsche Antworten entfernt, so dass man sich nur noch zwischen zwei Antworten entscheiden muss.

4 b) Ein Kandidat kann bei einer Frage die erste Antwort mit 100 %iger Sicherheit ausschließen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Verwendung des 50-50-Jokers diese falsche Antwort stehen bleibt?

8 c) Ein Kandidat, der die 64 000-Euro-Frage richtig beantwortet hat, überlegt, ob er den Joker entweder bei der nächsten oder erst bei der letzten Frage einsetzen soll. Berechnen Sie für diese beiden Möglichkeiten jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Kandidat durch reines Raten mit genau 64 000 €, mit genau 128 000 € bzw. mit dem Höchstgewinn nach Hause geht.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4. In den vergangenen Jahren haben insgesamt 585 Personen, von denen 315 weiblich waren, bei der Quizshow mitgespielt. 90 Personen haben einen Gewinn von mindestens 128 000 € erzielt, davon waren 40 weiblich.

2 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig aus den 585 Kandidaten ausgewählte Person männlich und hat mindestens 128 000 € gewonnen?

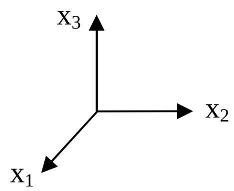
5 b) Untersuchen Sie die Ereignisse „Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich“ und „Eine zufällig ausgewählte Person hat mindestens 128 000 € gewonnen“ auf stochastische Unabhängigkeit.

5 5. Für die Abschätzung der Zuschauerquote werden 200 repräsentativ ermittelte Personen befragt. Sollten weniger als 25 % davon die Quizshow gesehen haben, so soll diese abgesetzt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Quizshow abgesetzt wird, obwohl in Wirklichkeit die Zuschauerquote bei 30 % liegt.

40

## GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

| BE | V. |
|---|---|
| | In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6\,\vert\,2\,\vert\,6)$ und $B(6\,\vert\,6\,\vert\,2)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben. |
| 2 | 1. Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, der Punkt B jedoch nicht. |
| 8 | 2. Die Ebene E enthält den Punkt B und die Gerade g; die Ebene H enthält ebenfalls den Punkt B, steht aber auf g senkrecht. Bestimmen Sie für die beiden Ebenen je eine Gleichung in Normalenform. [mögliche Ergebnisse: E: $x_1 + x_2 + x_3 - 14 = 0$; H: $x_1 - x_2 = 0$] |
| 6 | 3. a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt M der Geraden g mit der Ebene H die Koordinaten $(4\,\vert\,4\,\vert\,6)$ hat, und ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C, der sich als Bildpunkt von A bei einer Spiegelung an der Ebene H ergibt. [Zur Kontrolle: $C(2\,\vert\,6\,\vert\,6)$] |
| 4 | b) Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze die gegenseitige Lage der Geraden g, der Punkte A, B, C und M sowie der Schnittgeraden s von E und H. Wählen Sie dazu die Ebene E als Zeichenebene. |
| | 4. Das Dreieck ABC ist Grundfläche einer Pyramide mit Spitze S. |
| 4 | a) S liegt auf dem Lot zur Ebene E durch den Punkt B sowie auf der $x_3$-Achse. Bestimmen Sie die Koordinaten von S. [Zur Kontrolle: $S(0\,\vert\,0\,\vert\,-4)$] |
| 6 | b) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide ABCS. |
| 3 | c) Eine zweite Pyramide mit derselben Grundfläche ABC, aber anderer Spitze $S^*$, besitzt den gleichen Rauminhalt V. Beschreiben Sie die möglichen Lagen von $S^*$ in Worten (keine Rechnung nötig). |
| | 5. Die dreieckige Seitenfläche ACS der Pyramide wird nun so weit um die Achse g gedreht, bis der gedrehte Punkt S des Dreiecks in der Ebene E zum Liegen kommt (zwei Möglichkeiten). |
| 3 | a) Begründen Sie, dass der Kreisbogen, auf dem sich S dabei bewegt, in der Ebene H liegt. |
| 4 | b) Bestimmen Sie die beiden Drehwinkel. |
| 40 | |

| BE | **VI.** |
|---|---|
| | In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3\,|\,-2\,|\,3)$, $B(3\,|\,2\,|\,3)$, $C(6\,|\,2\,|\,7)$ und $D(6\,|\,-2\,|\,7)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben. |
| 6 | 1. a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene H, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird. Beschreiben Sie die Lage von H im Koordinatensystem. [mögliches Ergebnis: $H: 4x_1 - 3x_3 - 3 = 0$] |
| 5 | b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein ebenes Rechteck mit Flächeninhalt 20 ist. |
| 6 | c) Berechnen Sie den Schnittpunkt E der Geraden g mit der Ebene H. Zeigen Sie, dass E auf der Halbgeraden [AB, aber nicht auf der Strecke [AB] liegt. [Ergebnis: $E(3\,|\,6\,|\,3)$] |
| 3 | d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $F \in [BA$ so, dass das Viereck ECDF ein achsensymmetrisches Trapez ist. |
| 6 | e) Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Trapezes und zeigen Sie, dass es den Flächeninhalt 40 hat. |
| | 2. Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der $x_1x_3$-Ebene ist die Spitze einer Pyramide mit dem Trapez ECDF als Grundfläche. |
| 6 | a) Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide. [Teilergebnis: S(6\|0\|12)] |
| 4 | b) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein. (Platzbedarf: ganze Seite; Ursprung genau in Blattmitte)  |
| 4 | c) Begründen Sie, dass die Pyramide bei Spiegelung an einer geeigneten Ebene in sich abgebildet wird, und geben Sie eine Gleichung dieser Symmetrieebene in Normalenform an. |
| 40 | |