Abiturprüfung 2001

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE	
	Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \ln(4+x) - \ln(4-x)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-4;4[$. G_f bezeichnet den Graphen von f.
3	1. a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
2	b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.
8	c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f. Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie dessen Koordinaten. $\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = \dfrac{8}{16-x^2}\right]$
5	d) Berechnen Sie f(-3), f(-2) und $f'(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm).
7	e) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie den Funktionsterm von f^{-1}. Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.
	2. Gegeben ist außerdem die Funktion $g\colon x \mapsto \ln(4+x)$ mit $D_g =]-4;4[$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.
3	a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S \mid y_S)$ haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. [Zur Kontrolle: $x_S = 3$]
4	b) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]-4;3[$ unterhalb und für $x \in]3;4[$ oberhalb von G_g verläuft.
5	c) Beweisen Sie, dass $K\colon x \mapsto -x-(4-x)\cdot\ln(4-x)$ mit $D_K =]-4;4[$ eine Stammfunktion von $g-f$ ist, und berechnen Sie $J_1 = \int_0^1 [g(x)-f(x)]dx$ auf zwei Dezimalen genau.
3	d) Begründen Sie, für welchen Wert $t \in]-4;4[$ das Integral $J_t = \int_0^t [g(x)-f(x)]dx$ den größten Wert annimmt.
40	

BE

II.

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k\colon x \mapsto \dfrac{2x-k}{(x+k)^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximalem Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

6 1. a) Bestimmen Sie D_k und das Verhalten von f_k an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie alle Asymptoten von G_k an.

2 b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen.

9 2. a) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_k in Abhängigkeit von k.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } f_k'(x) = \dfrac{4k-2x}{(x+k)^3}\right]$

6 b) Berechnen Sie $f_1(-4)$, $f_1(-2)$ und $f_1(4)$. Zeichnen Sie nun mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_1 im Intervall $[-6;6]$ in ein Koordinatensystem ein. (Querformat, Abstand zwischen Ursprung und unterer Blattkante: 11 cm, Längeneinheit 2 cm)

6 c) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte aller Graphen G_k auf der Kurve C mit der Gleichung $y = \dfrac{2}{3x}$ liegen. Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Kurve mit der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten und zeichnen Sie die Kurve C für $x > 0$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 2b ein.

3. Im Folgenden wird nun die Funktion f_1 betrachtet.

4 a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F\colon x \mapsto 2\ln(x+1) + \dfrac{1-2x}{x+1}$ für $x > -1$ eine Stammfunktion von f_1 ist.

7 b) Berechnen Sie den Inhalt J der Fläche, die von G_1, der Kurve C der Extrempunkte und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eingeschlossen wird, auf 2 Dezimalen genau.

40

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % fehlerhaft.

2 1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 100 Chips genau 15 fehlerhaft?

5 b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Tabellenwerks das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 15, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.

5 c) Wie viele Chips müssen der Produktion mindestens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist?

6 2. Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3 %. Insgesamt werden 83 % aller Chips nicht ausgesondert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Welcher Anteil der fehlerhaften Chips wird demnach ausgesondert?

3. Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 200 Chips entnommen. Befinden sich darunter höchstens 22 fehlerhafte, wird die Prämie gewährt.

5 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält das Team die Prämie, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist?

5 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dem Team die Prämie verweigert, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	Die nebenstehende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammensetzung des Expertenteams. Nach Abschluss ihrer Arbeiten treffen sich die 12 Mitglieder des Teams zu einem Abschiedsabend.

	Frauen	Männer
Deutsche	3	2
Engländer	2	1
Franzosen	1	3

4. In einem Lokal sind ein Vierertisch und ein Achtertisch reserviert. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tische zu besetzen, wenn es auf die Sitzordnung an den einzelnen Tischen nicht ankommt und wenn an jedem Tisch

3 a) gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?

4 b) mindestens zwei deutsche Mitglieder sitzen sollen?

5 5. Zu vorgerückter Stunde wird getanzt. Die Tanzpaarungen werden auf folgende Weise ausgelost: In einem Hut befinden sich 6 gefaltete Zettel mit den Namen der Damen. Die Herren ziehen nacheinander zufällig je einen Zettel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 6 Tanzpaaren genau zwei deutsche Paare befinden.

40

BE

IV.

Ein Gesangverein hat 30 weibliche und 20 männliche Mitglieder. Die Zahl der Anwesenden bei der wöchentlichen Chorprobe schwankt von Mal zu Mal. Um diese Schwankung durch ein Modell zu beschreiben, soll davon ausgegangen werden, dass die Mitglieder unabhängig voneinander und jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % an einer Probe teilnehmen.

3 1. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Chorprobe mindestens 40 Mitglieder anwesend sind?

5 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen bei einer Chorprobe 6 Sängerinnen und 4 Sänger?

6 c) Für die nächste Chorprobe haben sich 5 Mitglieder entschuldigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei dieser Probe höchstens noch ein weiteres Chormitglied?

3 d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei einer Chorprobe von den Sängerinnen Sandra und Simone entweder die eine oder die andere?

6 e) Wie viele Chorproben müssen mindestens stattfinden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einmal alle 5 Tenöre des Vereins gemeinsam anzutreffen sind?

7 2. Der Chorleiter vermutet, dass die Anwesenheitsquote unter 85 % gefallen ist. Um diese Vermutung zu überprüfen, soll die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}85$ auf dem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dazu wird bei vier Chorproben jeweils die Anzahl der Anwesenden festgestellt. Die Entscheidung soll aufgrund der Summe dieser vier Zahlen getroffen werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

4 3. Die beiden anfangs genannten und bisher verwendeten Modellannahmen für das Vorliegen einer Bernoullikette können in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand je eines konkreten Beispiels.

4. Unter den 20 Männern des Vereins sind fünf Tenöre, acht Baritone und sieben Bässe. Bei einer Veranstaltung singen ein Tenor, zwei Baritone und zwei Bässe in einem Quintett.

3 a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen des Quintetts aus den Sängern des Vereins sind hierfür möglich?

3 b) Nach ihrem Auftritt stellen sich die 5 Sänger nebeneinander auf und verbeugen sich. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es dafür, wenn die 2 Bässe nebeneinander stehen wollen?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte A(–2| 8| 0), B(0| 0| –2), C(1| 2| 0) und D(0| 6| 1) gegeben.

5 1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A, B, C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.

5 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.
[Zur Kontrolle: M(0| 4| 0)]

4 c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB.
[Zur Kontrolle: $d = 1{,}5\sqrt{2}$]

4 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes ABCD.

5 e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Viereck ABCD liegt, in Normalenform.
[Mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

Das gleichschenklige Trapez ABCD bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide ABCDS. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E.

5 2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
[Zur Kontrolle: S(10| 9| –10)]

4 b) Zeigen Sie, dass der Punkt T (6| 7| –6) die Strecke [MS] innen im Verhältnis 3 : 2 teilt.

2 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F, die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform.

6 d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide ABCDS entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7 % des Volumens der Pyramide ABCDS beträgt.

40

BE

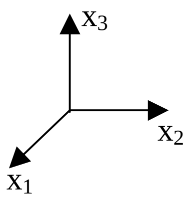
VI.

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene
$E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$. Ihr Schnittpunkt mit der x_1-Achse heißt S_1, mit der x_2-Achse S_2 und mit der x_3-Achse S_3.

4 1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an. [Zur Kontrolle: $S_3(0 \mid 0 \mid 20)$]

4 b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L. [Zur Kontrolle: $L(3 \mid 9 \mid 0)$]

4 c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.

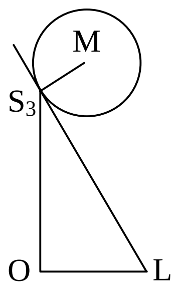


7 d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf 0,1° genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3.

6 a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2 \mid 6 \mid 23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3 L$ liegt.



Skizze nicht maßstabsgetreu

4 b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2-Ebene und rollt auf dieser weiter.

5 c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b) mit der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt. [Zur Kontrolle: $T(4{,}4 \mid 13{,}2 \mid 7)$]

6 d) Bestimmen Sie den letzten Berührpunkt B, den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.

40