Abiturprüfung 2000

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-2}{(x+2)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

5 1. a) Bestimmen Sie D_f und die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
Untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücke.

4 b) Zeigen Sie, dass der Graph G_f die Gerade $y = 1$ als horizontale Asymptote besitzt und dass er sich dieser für $x \to +\infty$ von unten nähert.

10 c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts.
Untersuchen Sie G_f auf Wendepunkte.

[zur Kontrolle: $f'(x) = 4 \cdot \frac{x+1}{(x+2)^3}$]

6 d) Zeichnen Sie die Asymptoten sowie G_f im Bereich $-2 < x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte an den Stellen 0,5 und 1 (Längeneinheit 2cm).

2. Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ umschließen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A.

4 a) Schätzen Sie A mit Hilfe der Streifenmethode durch vier Rechtecke gleicher Breite nach oben ab (2 Dezimalen).

7 b) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto x - 4 \cdot \ln(x+2) - \frac{2}{x+2}$ für $x > -2$ eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie den Flächeninhalt A durch Integration (2 Dezimalen).

4 c) Besser als durch die Streifenmethode in Teilaufgabe 2a lässt sich im konkreten Fall der Flächeninhalt A durch den Flächeninhalt eines Trapezes abschätzen. Geben Sie die Eckpunkte eines geeigneten Trapezes an und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

40

BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

G_f bezeichnet den Graphen von f.

5 1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an.

10 b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f. Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von G_f. [zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-0,5x}(4-2x)$]

7 c) Die Gleichung der Wendetangente w lautet $y = \dfrac{-4}{e^2}x + \dfrac{32}{e^2}$.

Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem w die y-Achse schneidet.

6 d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1 und 6. Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente w im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: 1 cm).

3 2. a) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \dfrac{-8x-16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist.

4 b) Der Graph G_f, die x-Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A auf 2 Dezimalen gerundet.

5 3. Skizzieren Sie einen Anwendungszusammenhang beispielsweise aus den Naturwissenschaften oder der Wirtschaftslehre, in dem eine Funktion der Art $x \mapsto a \cdot e^{bx}$ eine wichtige Rolle spielt ($a, b \neq 0$).
Begründen Sie kurz, ob der Parameter b in dem von Ihnen beschriebenen Anwendungszusammenhang positiv oder negativ ist.
Welche Bedeutung hat der Parameter a?

40

BE

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

Ein Fachmarkt besteht nur aus einer Bau- und einer Gartenabteilung; in letzterer werden unter anderem Tulpenzwiebeln von rot blühenden, gelb blühenden sowie weiß blühenden Tulpen verkauft.

1. Eine große Kiste wurde zu gleichen Teilen mit Tulpenzwiebeln der genannten drei Sorten gefüllt. Von diesen äußerlich nicht unterscheidbaren Zwiebeln werden auf zufällige Weise 12 in eine Tüte gepackt. Rechnen Sie im Folgenden wie bei „Ziehen mit Zurücklegen“.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Tüte

3 a) genau eine Zwiebel der rot blühenden Tulpensorte enthält?

3 b) wenigstens zwei Zwiebeln der rot blühenden Tulpensorte enthält?

4 c) von jeder Zwiebelsorte gleich viele enthält?

2. Auf gleiche Weise wie in Aufgabe 1 werden jeweils 12 Zwiebeln in eine Tüte gepackt. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Tüteninhalt berechnet sich zu

2 a) $P(A) = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \frac{2}{3}$

2 b) $P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$

   Beschreiben Sie jeweils einen möglichen Tüteninhalt, für den die angegebene Wahrscheinlichkeit zuträfe.

5 3. Ein Gärtner pflanzt 10 Zwiebeln der rot blühenden Sorte und 10 Zwiebeln der gelb blühenden Sorte in zwei Reihen mit 8 und 12 Zwiebeln. Wie viele Möglichkeiten der Bepflanzung gibt es, wenn sich in einer der Reihen genau 4 Zwiebeln der gelb blühenden Tulpensorte befinden sollen?

4 4. Laut Verpackungsangabe kommt es bei sachgerechter Pflanzung einer Tulpenzwiebel im nächsten Frühjahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % zu einer Blüte. Wie viele Zwiebeln kann man höchstens pflanzen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass es bei allen Zwiebeln zu einer Blüte kommt, größer als 75 % ist?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	5. Eine Erhebung über einen längeren Zeitraum hat ergeben, dass 60 % der Fachmarktbesucher in der Bauabteilung und 45 % in der Gartenabteilung Waren kaufen. 15 % der Besucher verlassen den Fachmarkt, ohne einen Einkauf getätigt zu haben. Untersuchen Sie, ob der Einkauf von Waren aus der Bauabteilung unabhängig vom Einkauf von Waren aus der Gartenabteilung erfolgt.
	6. Der Fachmarkt erweitert sein Angebot. Die Firmenleitung vermutet, dadurch das Einkaufsverhalten dahingehend geändert zu haben, dass der Anteil der Fachmarktbesucher, die tatsächlich Waren einkaufen, von 85 % auf mindestens 90 % gesteigert wurde. Zur Erfolgskontrolle wird das Einkaufsverhalten von 200 zufällig ausgewählten Besuchern erfasst.
4	a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 175 der erfassten Besucher Waren einkaufen, obwohl sich das Einkaufsverhalten nicht geändert hat?
7	b) Die Vermutung der Firmenleitung (Nullhypothese) soll auf dem Signifikanzniveau 5 % getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
40	

IV.

BE

Die Schokoladenfabrik „Furore 2000“ stellt Schokoriegel und Pralinen her. Um den Verkauf der Riegel zu fördern, wird einem Teil entsprechend dem Slogan „In jedem siebten Riegel liegt ein Zauberspiegel“ ein Werbegeschenk beigelegt. Marion kauft 14 Riegel und öffnet sie nacheinander.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie

3 a) in den letzten beiden Riegeln je einen Zauberspiegel findet?

3 b) nur in den letzten beiden Riegeln je einen Zauberspiegel findet?

3 c) insgesamt zwei Zauberspiegel findet?

10 2. Ein Vater kauft für seine beiden Kinder Schokoriegel. Er erwirbt die doppelte Anzahl von Riegeln, die er wenigstens bräuchte, um mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen Zauberspiegel zu erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dann für jedes Kind mindestens einen Zauberspiegel?

6 3. Eine Umfrage ergibt, dass im Mittel 7 von 10 Befragten den Schokoriegel und 2 von 3 Befragten die Pralinen von Furore 2000 kennen. 90 % der Befragten kennen wenigstens eines der beiden Produkte. Untersuchen Sie, ob für die Bekanntheit der Produkte stochastische Unabhängigkeit zutrifft.

7 4. Zur Steigerung ihres Bekanntheitsgrads beauftragt Furore 2000 eine Agentur mit einer Werbekampagne. Es wird vereinbart, dass die Agentur eine besondere Prämie bekommen soll, wenn nach der Kampagne mindestens 95 % der Bevölkerung den Markennamen kennen. Es wird eine Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt. Bestimmen Sie die für Furore 2000 günstigste Vereinbarung mit der Agentur, bei der die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % ausgezahlt wird, falls ein Bekanntheitsgrad von 95 % erreicht wurde.

5. Zum Jahrtausendwechsel hat die Firmenchefin, eine Hobbymathematikerin, unter ihren Mitarbeitern ein Preisrätsel veranstaltet. Beantworten Sie die beiden dort gestellten Fragen:

4 a) Auf wie viele Arten kann man die Primfaktoren in der Primfaktordarstellung der Zahl 2000 anordnen?

4 b) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl 2000?

40

BE

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6|0|-2)$, $B(-2|4|-2)$ und $S(2|2|3)$ und die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

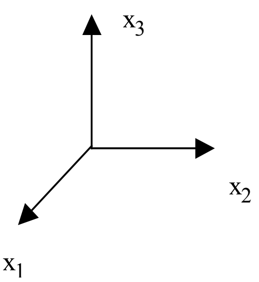
Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

8 1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf? [mögliches Ergebnis: E: $x_3 + 2 = 0$]

4 b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E.

4 c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke [AB] halbiert. [zur Kontrolle: $F(2|2|-2)$]

4 d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein. (Platzbedarf: halbe Seite)



3 2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S. Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt.

7 b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K. Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d um Punkt C. [zur Kontrolle: $C(0|-2|-2)$]

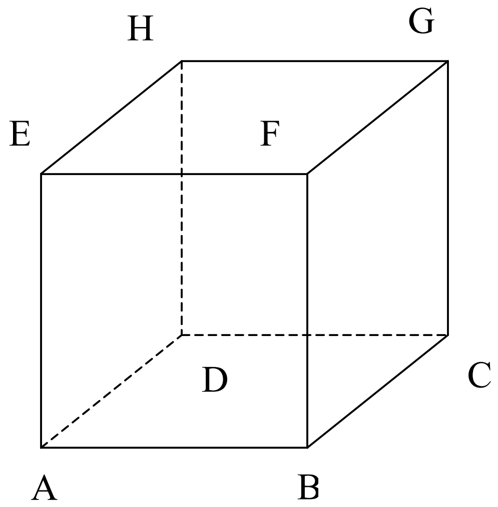
5 c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist.

5 d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide ABCS.

40

BE

VI.



Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2|-1|0)$, $B(6|3|-2)$ und $H(4|1|8)$.

Die Punkte A, B und H sind Eckpunkte des Würfels ABCDEFGH.

6 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T, die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T? [mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]

2 b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck ABGH ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G. [Ergebnis: $G(8|5|6)$]

2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.

5 a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen [BG] und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.

4 b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale [BG]. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.

4 c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F. Verwenden Sie dabei, dass die x_1-Koordinate von C kleiner ist als die von F. [Ergebnis: $C(4|7|2)$, $F(10|1|2)$]

2 d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E.

3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

4 a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.

5 b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders. [zur Kontrolle: $d = \sqrt{3}$]

2 c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.

6 d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

40