BAYERN Abitur 1997 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist für $a \neq 0$ die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto x + \frac{x+a}{x}$$

mit Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der zu f_a zugehörige Graph wird mit G_a bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. Untersuchen Sie – gegebenenfalls mittels Fallunterscheidung – das Verhalten von f_a an den Rändern des Definitionsbereichs. (7 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a eine gemeinsame schiefe Asymptote g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an. (3 BE)

   (c) Weisen Sie die Gültigkeit folgender Beziehung nach:

   $$f_a(x) - 1 = 1 - f_a(-x)$$

   Welche Symmetrieeigenschaft des Graphen G_a ist damit nachgewiesen? (5 BE)

   (d) Für welche Werte von a hat G_a zwei Extrempunkte? Bestimmen Sie Art und Lage eines jeden Extrempunkts. (8 BE)

   (e) Berechnen Sie $f_1(x)$ und $f_{-2}(x)$ für $x = 1$ und $x = 4$, und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse die Graphen von f_1 und f_{-2} sowie die Asymptote g aus Teilaufgabe 1b im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ (Längeneinheit 1 cm). (7 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F_a : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2} + a \ln x$ für $x > 0$ eine Stammfunktion von f_a ist. (3 BE)

   (b) Die Graphen G_1, G_{-2} und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = k$ $(k > 1)$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie k so, dass der Inhalt dieses Flächenstücks 3 ist. (7 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto (x+1)^2 \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.
Hinweis: Im Folgenden darf ohne Beweis verwendet werden:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$. Ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen, und geben Sie die Wertemenge von f an. (7 BE)

   (b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x^2) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$] (8 BE)

   (c) Berechnen Sie $f(-1,25)$, $f(3)$ sowie $f(5)$, und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1,25 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1 cm, Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-6 \leq y \leq 6$). (6 BE)

   Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g : x \mapsto 2(x+1) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei G_g.

2. (a) Weisen Sie nach, dass f und g nur an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gleiche Funktionswerte haben. (4 BE)

   (b) Der Graph G_g besitzt als einzigen Extrempunkt einen Hochpunkt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie dessen Koordinaten. (4 BE)

   (c) Berechnen Sie $g(-1,25)$, $g(3)$ sowie $g(5)$, und zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1,25 \leq x \leq 5$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein. (4 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) = f(x) + f'(x)$. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie nun den Inhalt der Fläche, die im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ von G_f und G_g begrenzt wird. (4 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem enthält die Gerade g den Punkt $S(2|4|-2)$ und besitzt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene $x_2 = -2$.
   [Ergebnis: $P(-1|-2|1)$] (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PAS mit $A(2|-2|-2)$ bei A rechtwinklig ist. Fertigen Sie eine Skizze an, die das Dreieck PAS und die Gerade g enthält. (3 BE)

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck PAS liegt, in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?
   [mögliches Ergebnis: $E : x_1 + x_3 = 0$] (6 BE)

   Der Punkt F ist Fußpunkt des Lotes von dem Punkt A (Teilaufgabe 1b) auf die Gerade g.

2. (a) Bestimmen Sie F, und tragen Sie den Punkt F in die Skizze von Teilaufgabe 1b ein.
   [Ergebnis: $F(0|0|0)$] (5 BE)

   (b) Der Spiegelpunkt des Punktes A an der Geraden g heißt C. Bestimmen Sie C, und tragen Sie C in die Skizze von Teilaufgabe 1c ein. (2 BE)

   (c) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Quadrats mit dem Diagonalenschnittpunkt F. Die Diagonale BD des Quadrats steht senkrecht auf der Ebene E (Teilaufgabe 1c). Bestimmen Sie die Punkte B und D.
   [mögliches Teilergebnis: $B(\sqrt{6}|0|\sqrt{6})$] (7 BE)

   (d) Die Pyramide $ABCDP$ hat ihre Spitze im Punkt P (Teilaufgabe 1a). Welchen Winkel (auf $1°$ genau) schließt eine Seitenkante dieser Pyramide mit der Grundfläche ein? Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDP$. (8 BE)

3. (a) Die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ (Teilaufgabe 2c) liegen auf der Kugel K, deren Mittelpunkt der Punkt P (Teilaufgabe 1a) ist. Geben Sie die Gleichung der Kugel K an. (3 BE)

   (b) Geben Sie Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel an, auf der die Eckpunkte A, B, C und D liegen. (3 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $C(4|0|4)$, die Ebene E_1 : $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass der Punkt C auf der Geraden g liegt. (2 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes A der Geraden g mit der Ebene E_1.
   [Ergebnis: $A(1|0|-2)$] (4 BE)

   (c) Berechnen Sie den Winkel zwischen einem Richtungsvektor der Geraden g und einem Normalenvektor der Ebene E_1 auf $0,1°$ genau. Unter welchem Winkel schneidet also die Gerade g die Ebene E_1? (5 BE)

   (d) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes C von der Ebene E_1. Prüfen Sie, ob der Punkt C und der Ursprung O des Koordinatensystems auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1 liegen. (5 BE)

   Die Ebene E_2 enthält die Gerade g und steht senkrecht auf der Ebene E_1.

2. (a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform auf.
   [mögliches Ergebnis: $E_2 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$] (5 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.
   [mögliches Ergebnis: $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$] (6 BE)

   (c) Bestimmen Sie auf der Geraden s den Punkt B so, dass das Dreieck ABC (A: Teilaufgabe 1b) bei C einen rechten Winkel besitzt. Fertigen Sie eine Skizze an, die das Dreieck ABC sowie die Geraden g und s enthält.
   [Ergebnis: $B(-4|10|8)$] (7 BE)

   (d) Durch Rotation des Dreiecks ABC um die Gerade AB als Achse entsteht ein Doppelkegel, der aus zwei geraden Kreiskegeln mit gemeinsamer Grundfläche besteht. Berechnen Sie das Volumen dieses Doppelkegels. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

In einem Spielcasino sind Spielautomaten aufgestellt, die Zufallszahlen der Form $a_1a_2a_3$ (z. B. 074) erzeugen, wobei a_1, a_2 und a_3 Ziffern von 0 bis 9 sind. Alle diese Zufallszahlen erscheinen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

1. Ein Spieler betätigt einen der Automaten einmal. Betrachen Sie folgende Ereignisse:

   A: „Die mittlere Ziffer ist eine 7."

   B: „Drei verschiedene Ziffern."

   C: „Drei verschiedenen Ziffern mit $a_1 < a_2 < a_3$."

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C. [Teilergebnis: $P(C) = 0,12$] (8 BE)

   (b) Untersuchen Sie die Ereignisse A und C auf Unabhängigkeit. (5 BE)

   Eine Zufallszahl aus dem Ereignis C (vgl. Aufgabe 1) wird im Folgenden als Glückszahl bezeichnet.

2. Wie oft muss man den Spielautomaten mindestens betätigen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Glückszahl erscheint? (6 BE)

3. (a) Der Spielautomat zahlt dem Spieler für jede Glückszahl das 8fache des Einsatzes aus. In allen anderen Fällen bekommt der Spieler nichts ausbezahlt. Ein Spieler spielt 25mal mit gleichem Einsatz. Wie oft darf er höchstens gewinnen, damit das Casino keinen Verlust macht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dies ein? (9 BE)

   (b) An einem Abend wird der Spielautomat 1997mal betätigt. Welche Werte darf die Anzahl der Glückszahlen nur annehmen, wenn ihre relative Häufigkeit um weniger als $0,02$ von der Eintrittswahrscheilichkeit abweichen soll? (5 BE)

4. Der Besitzer des Casinos vermutet, dass bei einem neugelieferten Spielautomaten Glückszahlen ungewöhnlich häufig auftreten. Der Automat soll ausgetauscht werden, wenn bei einem Test mit 200 Spielen die relative Häufigkeit der Glückszahlen mindestens $0,14$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Automat nicht ausgetauscht wird, obwohl bei ihm Glückszahlen mit der Wahrscheinlichkeit $0,15$ auftreten? (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. Auf dem Bahnsteig einer U-Bahn befindet sich eine Sitzbank mit 10 Plätzen. Auf diese setzen sich 10 Personen, von denen 2 keinen gültigen Fahrausweis haben (Schwarzfahrer).

   (a) Auf wie viele verschiedenen Arten können sie Platz nehmen, wenn nur zwischen Personen mit umd ohne gültigem Fahrausweis unterschieden wird? In wie vielen Fällen sitzen dabei die Schwarzfahrer nebeneinander? (4 BE)

   (b) Von den 10 Personen werden 2 zufällig ausgewählt und kontrolliert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich darunter genau 1 Schwarzfahrer? (5 BE)

2. Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% unter 100 Fahrgästen mindestens ein Schwarzfahrer ist? (7 BE)

3. 97% aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis. Ein Kontrolleur überprüft 5% der Fahrgäste. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast Schwarzfahrer ist und von ihm kontrolliert wird, beträgt $0,20\%$. Untersuchen Sie, ob der Kontrolleur einen geschärften Blick für Schwarzfahrer hat oder ob die Auswahl der kontrollierten Personen rein zufällig erfolgt. (5 BE)

4. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Fahrgast bei einer Kontrolle als Schwarzfahrer erweist, beträgt 5%. Es werde 100 Einzelkontrollen durchgeführt.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens 3 und höchstens 8 Schwarzfahrer? (6 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau 3 Schwarzfahrer ertappt, die sich zudem nicht unter den ersten 20 Kontrollierten befinden? (6 BE)

5. Es wird vermutet, dass auf Grund verstärkter Kontrollen der Anteil der Schwarzfahrer unter 5% gesunken ist. Um dies zu testen, werden 200 Einzelkontrollen ausgewertet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich anzunehmen, dass der Anteil der Schwarzfahrer gesunken ist, soll höchstens 10% betragen. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel. (7 BE)