BAYERN Abitur 1995 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$f : x \mapsto \frac{4x-4}{x^2-2x+2}$$

mit ihrer maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

1. (a) Zeigen Sie: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
   Geben Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und die Nullstelle von f an. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f an.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{4x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$] (9 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x+1)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
   Welche Symmetrieeigenschaft hat demnach der Graph von f? (4 BE)

   (d) Berechnen Sie die Werte $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-1)$ und $f(0,5)$.
   Zeichnen Sie mit Hilfe aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f im Intervall $[-4; 6]$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm). (6 BE)

2. (a) Begründen Sie, dass f auf $]-\infty; 0]$ umkehrbar ist, und geben Sie die Definitions- und die Wertemenge der Umkehrfunktion g an. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie: $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
   Begründen Sie damit, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $S(-\sqrt{2}|-\sqrt{2})$ schneiden. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1d ein. (6 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto 2 \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (2 BE)

   (b) Die Graphen von f und g und die Koordinatenachsen begrenzen ein Flächenstück im III. Quadranten. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks (auf zwei Dezimalen gerundet).
   Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie des Flächenstücks. (6 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \mapsto \mathrm{e} - \mathrm{e}^{k-\frac{x}{2}}$$

mit $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_k bezeichnet.

1. (a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der Scharfunktionen für $x \to -\infty$.
   [Teilergebnis: $(2k - 2|0)$] (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Gerade $h : x \mapsto \mathrm{e}$ eine horizontale Asymptote von G_k für $x \to \infty$ ist und dass alle Graphen der Schar stets unterhalb von h verlaufen. (3 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von f_k. (5 BE)

   (d) Für welche x-Werte unterscheidet sich $f_{-1}(x)$ von e um weniger als $0,1$? (4 BE)

   (e) Berechnen Sie die Funktionswerte $f_{-1}(-7)$, $f_2(-1)$ und $f_2(8)$ auf 2 Dezimalen gerundet, und zeichnen Sie die Graphen G_{-1} und G_2 im Intervall $[-7; 8]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).
   Tragen Sie auch die Asymptote h ein. (6 BE)

2. (a) Weisen Sie nach, dass $F_k : x \mapsto \mathrm{e} \cdot x + 2 \cdot \mathrm{e}^{k-\frac{x}{2}}$ mit $\mathbb{D}_{F_k} = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_k ist. (2 BE)

   (b) Der Graph G_k schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = 2k$ eine Fläche mit dem Inhalt A_k ein. Berechnen Sie A_k.
   [Ergebnis: $A_k = 2$] (5 BE)

   (c) Die Graphen G_k gehen durch Verschiebung parallel zur x-Achse auseinander hervor (Nachweis nicht erforderlich). Wie äußert sich dies im Ergebnis von Teilaufgabe 2b? Begründen Sie Ihre Antwort geometrisch. (5 BE)

3. Die Funktionen f_k der Schar sind alle umkehrbar.

   Begründen Sie dies kurz, berechnen Sie den Funktionsterm der Umkehrfunktionen, und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktionen an. (6 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $A(7|4|5)$ und die Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Punkt A und die Gerade g liegen in einer Ebene E.

1. (a) Begründen Sie, dass die Ebene E durch den Punkt A und die Gerade g eindeutig festgelegt ist. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$] (6 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Gerade h und die Ebene E parallel sind, und berechnen Sie den Abstand von h und E.
   [Teilergebnis: $d(h; E) = \sqrt{14}$] (6 BE)

2. Die Schnittgerade der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene heiße s.

   (a) Bestimmen Sie eine Gleichung von s in Parameterform.
   [Mögliches Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \sigma \in \mathbb{R}$] (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass der Punkt $B(0|3|0)$ auf s liegt, und bestimmen Sie einen Punkt C auf s so, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.
   [Teilergebnis: $C(1|1|0)$] (7 BE)

3. Das Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt S_μ auf der Geraden h bilden eine dreiseitige Pyramide.

   (a) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. (8 BE)

   (b) Die Vektoren $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ und $\vec{CS_0}$ mit $S_0(1|3| - 4)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (Nachweis nicht erforderlich). Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch in Bezug auf die Lage der Geraden h zur Ebene E. (8 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(3|4|6)$, $B(-2|4|6)$ und $C(-2|0|3)$ die Ebene E fest. Außerdem ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. (a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf.
   [mögliches Ergebnis: $E : 3x_2 - 4x_3 + 12 = 0$] (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig mit Basis $[AC]$ ist. (4 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. (3 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Gerade g und die Ebene E nur den Punkt C gemeinsam haben. (5 BE)

   (b) Das Lot zur Ebene E durch den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ heiáe h. Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h in genau einem Punkt S schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten von S.
   [Teilergebnis: $S(0,5|3,5|2,5)$] (7 BE)

   (c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$ mit Grundfläche $ABCD$. (4 BE)

3. Die Schwerpunkte der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS$ bilden ein Quadrat, das in einer Parallelebene E' zu E liegt (Nachweis nicht erforderlich).

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats. (7 BE)

   (b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes M (vgl. Teilaufgabe 2b) von der Ebene E'. (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Eine Firma stellt Relais in großer Stückzahl her.

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffenes Relais defekt ist, beträgt 5%.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von zwölf Relais höchstens zwei defekt? (6 BE)

   (b) Wie viele Relais muss man der Produktion mindestens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% wenigstens ein defektes Relais zu erhalten? (5 BE)

2. Es wird vermutet, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit gestiegen ist. Man entnimmt eine Stichprobe von 200 Relais. Wie groß müsste dabei die Abzahl k der defekten Relais mindestens sein, wenn man die ursprüngliche Annahme von $p = 5\%$ höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% irrtümlich verwerfen will? (7 BE)

3. Ein Großunternehmer knüpft den Abschluss eines Liefervertrags an folgende Bedingung: Zunächst werde 50 Relais auf Funktionsfähigkeit geprüft. Sind zwei oder weniger Relais defekt, wird der Liefervertrag unterzeichnet. Bei vier oder mehr defekten Relais kommt kein Vertrag zustande. Falls genau drei der 50 Relais defekt sind, werden 25 weitere getestet, von denen für einen Vertragsabschluss höchstens eines defekt sein darf.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu der zweiten Stichprobe, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5% beträgt? (4 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Liefervertrag unterzeichnet wird, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5% beträgt? (8 BE)

4. Drei defekte und vier intakte, sonst nicht unterscheidbare Relais werden in einer Reihe angeordnet.

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür? (4 BE)

   (b) In wie vielen Fällen liegen genau zwei defekte Relais nebeneinander? (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Eine Familie, bestehend aus Vater, Mutter, Sohn und Tochter, geht in ein italienisches Restaurant zum Essen.

1. An der Garderobe sind noch acht Haken frei. Jedes Mitglied der Familie hängt seinen Mantel an einen leeren Haken. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Mäntel alle unterscheidbar sind? (4 BE)

2. In der Küche werden sechs verschiedene Pizzazutaten verwendet, darunter Salami. In der Speisekarte sind alle Pizzaarten mit mindestens drei Zutaten aufgeführt.

   (a) Wie viele Pizzaarten enthält die Speisekarte? (5 BE)

   (b) Wie viele Pizzaarten mit genau drei Zutaten enthalten keine Salami? (3 BE)

3. Die Mutter weiß, dass es dort zum Mittagessen mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% ihre Lieblingsspeise Lamm gibt. Wie oft muss die Mutter mindestens zum Mittagessen gehen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zweimal Lamm bestellen kann?

   [Hinweis: Lösung unter Zuhilfenahme des Tafelwerks.] (7 BE)

4. Als Nachspeise isst der Vater besonders gerne Tiramisu. Diese Nachspeise ist aber nicht immer vorrätig. Der Wirt verspricht der Familie ein Gratisessen, wenn der Vater bei den nächsten 20 Restaurantbesuchen nicht mindestens $k = 14$ mal Tiramisu bekommen kann.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt die Familie das Gratisessen, wenn der Wirt einer Bestellung von Tiramisu mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% nachkommen kann? (5 BE)

   (b) Wie groß dürft in seinem Versprechen der Wert von k höchstens sein, damit der Wirt mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 60% kein Gratisessen ausgeben muss, obwohl er nur 45% aller Tiramisubestellungen nachkommen kann? (7 BE)

5. Beim Außerhausverkauf weiß der Wirt aus Erfahrung, dass 60% der Kunden eine Pizza, 30% ein Nudelgericht und der Rest eine Gemüseplatte wünschen. Der Sohn möchte für seine Oma eine Gemüseplatte mit nach Hause nehmen. Er steht in einer Schlange vor der Ausgabe, vor ihm stehen noch acht Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

   (a) wünschen von den Personen vor ihm sechs eine Pizza und zwei ein Nudelgericht, (5 BE)

   (b) erhält er seine Gemüseplatte, wenn er weiß, dass nur noch drei Gemüseplatten vorrätig sind? (4 BE)