BAYERN Abitur 1994 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \ln \frac{x-3}{2x}$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Zeigen Sie: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus [0; 3]$. (5 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von $\mathbb{D}_f$, und geben Sie die Gleichungen aller Geraden an, die Asymptoten von G_f sind. (5 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Nullstelle und das Monotonieverhalten von f.

   [Zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3x}$] (6 BE)

   (d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. (4 BE)

   (e) Berechnen Sie $f(-5)$, $f(-1)$, $f(4)$ und $f(7)$ auf 2 Dezimalen gerundet, und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-5 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1 cm). (5 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto x \cdot \ln \dfrac{x-3}{2x} - 3\ln(3-x)$ im Bereich $x < 0$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Die Einschränkung von f auf $]-\infty; 0[$ ist umkehrbar. Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1e ein. Geben Sie die Definitionsmenge von g an. (4 BE)

   (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Teilaufgaben 2a und 2b das vom Graphen von g, den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = \ln 2$ begrenzte Flächenstück. (7 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto (1 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie, ermmitteln Sie die Nullstellen von f, und bestimmen Sie das Verhalten von f für $|x| \to \infty$.
   (Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.) (5 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f an.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = (x^3 - 3x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$] (10 BE)

   (c) Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f(3)$ und $f(4)$ im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm). (6 BE)

   (d) Die Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse und ein weiterer, beliebiger Punkt P des Graphen von f bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Punkt P, für den das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie auch diesen Inhalt an. (4 BE)

2. (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ die integralfreie Darstellung von $\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von F. (5 BE)

   (c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.
   Was bedeutet das Ergebnis geometrisch-anschaulich? (6 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch den Punkt $A(-1|1|1)$ und den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $B(0|3|3)$ und $C(2|2|5)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h eine Ebene E eindeutig bestimmen. (3 BE)

   (b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9 = 0$] (5 BE)

2. (a) Bestimmen Sie die Punkte auf g, die von A die Entfernung 3 besitzen. (4 BE)

   (b) Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ mit $D(1|0|3)$ eine Raute ist, und berechnen Sie dessen Flächeninhalt I. (Hinweis: Die Diagonalen einer Raute stehen aufeinander senkrecht und halbieren sich gegenseitig.)
   [Zur Kontrolle: $I = \sqrt{65}$]

3. (a) Vom Punkt $S(11|5|4)$ wird das Lot auf E gefällt, es trifft E im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten von F.
   [Zur Kontrolle: $F(5|3|9)$] (5 BE)

   (b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (3 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass F auf der Geraden AC liegt. In welchem Verhältnis teilt F die Strecke $[AC]$? (4 BE)

   (d) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen aller vorkommenden geometrischen Elemente hervorgehen. (5 BE)

   (e) Begründen Sie, dass die Pyramide $ABFDS$ den doppelten Rauminhalt wie die Pyramide $ABCDS$ aus Teilaufgabe 3b besitzt. (4 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte $A(-5|-5|-1)$ und $B(-2|-9|-1)$ die Gerade g und die Punkte $C(0|5|3)$ und $D(-3|9|3)$ die Gerade h.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D die Ecken eines Parallelogrammes sind. (3 BE)

   (b) Wesen Sie nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ kein Rechteck ist. (2 BE)

   (c) Berechnen Sie eine Normalenform der Ebene E, die auf der Geraden g senkrecht steht und den Punkt D enthält.
   [Mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - 4x_2 + 45 = 0$] (4 BE)

   (d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene E aus Teilaufgabe 1c. Begründen Sie, ob P auf der Strecke $[AB]$ liegt.
   [Zur Kontrolle: $P(-11|3|-1)$] (6 BE)

   (e) Legen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen der gegebenen Punkte und der Ebene E hervorgehen. (4 BE)

2. (a) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass das Lot vom Punkt $S(3|1|-26)$ auf die durch das Parallelogramm $ABCD$ festgelegte Ebene den Punkt A enthält. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (7 BE)

3. Durch die Punkte B und C wird eine weitere Gerade k festgelegt. k' ist diejenige Gerade, die zur Geraden k spiegelbildlich bezüglich der Ebene E aus Teilaufgabe 1c liegt.

   (a) Ergänzen Sie die Skizze von Teilaufgabe 1e entsprechend, und bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k'. (6 BE)

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Geraden g, k und k' begrenzt wird. (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ein Glücksrad ist in drei Sektoren mit den Farben Rot (R), Grün (G) und Blau (B) unterteilt. Es ist so konstruiert, dass der Pfeil nicht auf der Trennlinie zwischen zwei Sektoren anhält. Die Farbe, auf die der Pfeil nach Stillstand des Rades zeigt, gilt als gezogen. Die Farbe Rot erscheint mit der Wahrscheinlichkeit r $(0 < r < \frac{1}{3})$, die Farbe Grün mit der Wahrscheinlichkeit $g = 2r$.

1. Das Rad wird zweimal gedreht. Die Ereignisse E_1 und E_2 werden durch E_1 „Mindestens einmal Rot“ und E_2: „Genau einmal Grün“ definiert.

   (a) Berechnen Sie (z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms) die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$ in Abhängigkeit von r.
   [Teilergebnis: $P(E_1) = 4r - 8r^2$] (9 BE)

   (b) Begründen Sie, für welchen Wert von r $P(E_2)$ maximal wird. (4 BE)

2. Nun sei $r = \frac{1}{4}$.

   (a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_1 und E_2 aus Aufgabe 1 unabhängig sind. (4 BE)

   (b) Das Glücksrad wird viermal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dabei jede Farbe mindestens einmal? (8 BE)

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint bei zwölfmaligem Drehen des Glücksrads die Farbe Rot mindestens dreimal? (6 BE)

3. Jemand vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit r für die Farbe Rot kleiner als $\frac{1}{4}$ ist. Um diese Vermutung zu testen, dreht er das Glücksrad 200mal. Erscheint höchstens 40mal die Farbe Rot, nimmt er seine Vermutung an.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt er bei seiner Vermutung, obwohl $r = \frac{1}{4}$ ist? (4 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwirft ers seine Vermutung, obwohl $r = \frac{1}{4}$ gilt? (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Bei einem Kinderfest wurde eine Treppe mit 5 Stufen für ein Spiel vorbereitet. Das Startplateau (0. Stufe) und die folgenden Stufen sind mit den Farben Weiß (W), Rot (R) und Grün (G) markiert, wie es die Skizze zeigt. Ziel des Spiels ist, die 5. Stufe zu erreichen. Um die nächsthöhere Stufe zu erreichen, muss man mit einem Laplacewürfel, von dessen Flächen je zwei weiß, grün und rot gefärbt sind, die entsprechende Farbe werfen. Wirft man diese Farbe nicht, so muss man auf der bisherigen Stufe stehenbleiben.

1. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt man mit genau 5% Würfen ins Ziel? (2 BE)

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

   i. bei 12 Würfen genau viermal voranzukommen

   ii. mit genau 13 Würfen ins Ziel zu kommen. (7 BE)

   (c) Wie oft muss ein Kind mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Stufe höherzusteigen? (6 BE)

   Nun wird die Regel für die Stufen 1 bis 4 so abgeändert, dass man auf die nächstniedrigere Stufe steigen muss, wenn deren Farbe geworfen wird.

2. (a) Ein Kind steht auf dem Startplateau. Untesuchen Sie, ob die Ereignisse E_1: „Der erste Wurf ist weiß“ und E_2: „Nach seinen ersten beiden Würfen steht es auf der 1. Stufe“ unabhängig sind.
   [Teilergebnis: $P(E_2) = \frac{1}{3}$] (7 BE)

   (b) Veronika steht auf der 4. Stufe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie spätestens nach deri weiteren Würfen das Ziel? (7 BE)

3. Johanna glaubt, dass der Würfel gezinkt ist, und vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 aus Teilaufgabe 2.(a) nicht $\frac{1}{3}$, sondern nur $\frac{1}{5}$ ist. Sie will ihre Vermutung annehmen, wenn nach den ersten beiden Würfen von 30 Kindern höchsten 7 auf der 1. Stufe stehen.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie die Vermutung an, obwohl $P(E_2) = \frac{1}{3}$ ist? (5 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwirft sie die Vermutung irrtümlich? (6 BE)