BAYERN Abitur 1993 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{2x^2 - 4a^2}{x^2 - a^2}$$

mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{-a; +a\}$. Die Graphen der Schar werden mit G_a bezeichnet.

1. (a) Untersuchen Sie G_a auf Symmetrie, und ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen. (4 BE)

   (b) Geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten von G_a an.
   Zeigen Sie, dass die Graphen G_a für $x > a$ unterhalb der horizontalen Asymptote verlaufen. (6 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a denselben Extrempunkt besitzen, und bestimmen Sie dessen Art und Lage. (6 BE)

2. Weisen Sie nach, dass $F_a : x \mapsto 2x + a[\ln(x+a) - \ln(x-a)]$ für $x > a$ Stammfunktion von f_a ist. (4 BE)

3. Im Folgenden sei immer $a = \sqrt{2}$.

   (a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an $G_{\sqrt{2}}$ im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie $f_{\sqrt{2}}(1)$, $f_{\sqrt{2}}(3)$, und zeichnen Sie $G_{\sqrt{2}}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \leq x \leq +6$ (Längeneinheit 1 cm).
   Tragen Sie auch die Tangente t ein. (8 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass die in Teilaufgabe 3a berechnete Tangente t die horizontale Asymptote von $G_{\sqrt{2}}$ an der Stelle $x_0 = 2,5$ schneidet.
   Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das $G_{\sqrt{2}}$ mit seiner horizontalen Asymptote, der Tangente t und der Geraden $x = 6$ einschließt.
   Geben Sie A auf zwei Dezimalen gerundet an. (9 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto x(1 - \ln x)^2$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Nullstelle von f. Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.
   [Zur Kontrolle: $f'(x) = (\ln x)^2 - 1$] (9 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt hat und dass die Wendetangente die Gleichung $y = 2 - x$ besitzt. (5 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$.
   Geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ der Funktion f an.
   (Hinweis: $\lim\limits_{x \to 0} x(\ln x)^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.) (6 BE)

   (d) Berechnen Sie $f(2)$ und $f(4)$ auf 2 Dezimalen genau. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm).
   Tragen Sie auch die Wendetangente ein. (8 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} \cdot \left[\dfrac{5}{2} - 3\ln x + (\ln x)^2\right]$ mit $x \in \mathbb{D}_f$ eine Stammfunktion von f ist. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das G_f, die Wendetangente und die x-Achse im Bereich $x \geq 1$ begrenzen. (7 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ sowie die beiden Punkte $A(1|0|-4)$ und $C(-1|2|4)$ gegeben. A und C bestimmen die Gerade h.

1. (a) Begründen Sie, dass der Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$ Schnittpunkt der Geraden g und h ist. (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h zueinander senkrecht sind. (3 BE)

2. Auf g liegen zwei Punkte B und D so, dass die beiden Dreicke ABC und ACD bei B bzw. bei D rechtwinklig sind.

   (a) Geben Sie mit Begründung an, welches besondere Viereck die Punkte A, B, C und D bestimmen. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten von B und D.
   [Mögliches Ergebnis: $B(3|4|0)$; $D(-3|-2|0)$] (8 BE)

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$. (3 BE)

3. Die Geraden g und h bestimmen die Ebene E.

   (a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 = 0$] (5 BE)

   (b) Vom Punkt $S(0|-5|1,5)$ aus wird das Lot auf die Ebene E gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F.
   [Ergebnis: $F(-3|-2|0)$, Eckpunkt des Vierecks $ABCD$] (6 BE)

   (c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide $ABCDS$ mit Grundfläche $ABCD$ und Spitze S. (Hinweis: Ohne Begründung darf verwendet werden, dass alle Seitendreiecke rechtwinklig sind). (8 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|1|1)$, $B(10|-2|4)$, $C(4|4|1)$ und $P(7|3|2)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, und berechnen Sie den Winkel α zwischen den beiden Halbgeraden $[AB$ und $[AC$ (Auf Grad gerundet). (5 BE)

   (b) Die Geraden AB und AC spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie je eine Gleichung für E in Parameter- und in Normalenform.
   [Mögliches Teilergebnis: $x_1 - x_2 - 4x_3 + 4 = 0$] (6 BE)

2. (a) Gegeben ist die Gleichung $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$ mit geeigneten λ und μ. Berechnen Sie λ und μ. Was folgt aus dieser Gleichung für die Lage des Punktes P sowie für Länge und Richtung des Vektors $\vec{CP}$? Verdeutlichen Sie Ihre Ergebnisse durch eine geeignete Zeichnung.
   [Zur Kontrolle: $\lambda = \frac{1}{3}$; $\mu = 1$] (10 BE)

   (b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt T der Geraden AP und BC die Strecke $[AP]$? Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T. (6 BE)

   (c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke CPT und ABT? (3 BE)

3. Die Lotgerade zur Ebene E im Punkt P werde mit s bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf s, die von A die Entfernung 13 (Längeneinheiten) haben. (10 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Der Abfüllautomat einer Getränkefabrik füllt die Flaschen mit einer Ausschußwahrscheinlichkeit von 5% ab.

1. Die auf Ausschuß nicht kontrollierten Flaschen werden in Kästen zu je 20 Flaschen abgepackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Kasten mehr als einmal, aber höchstens viermal Ausschuß auftritt? (5 BE)

2. Ein Kasten mit 20 abgefüllten Flaschen enthält genau viermal Ausschuß.

   (a) Jemand entnimmt diesem Kasten nacheinander 2 Flaschen, ohne diese zurückzustellen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Flasche Ausschuß und zugleich die zweite nicht? (4 BE)

   (b) Eine andere Person entnimmt dem Kasten gleichzeitig 6 Flaschen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich darunter genau zweimal Ausschuß? (5 BE)

3. Der Ausschuß von 5% wird durch zwei voneinander unabhängige Fehler verursacht:

   F_1: „In die Flasche wird zuwenig eingefüllt."

   F_2: „Die Flasche wird beschädigt."

   Der Fehler F_1 tritt mit der Wahrscheinlichkeit 1% ein. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche

   (a) beschädigt ist,
   [Ergebnis: $P(F_2) = \frac{4}{99}$] (6 BE)

   (b) korrekt abgefüllt, aber beschädigt ist. (3 BE)

4. Wie viele Flaschen dürfen vom Automaten höchstens abgefüllt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% kein Ausschuß auftritt? (6 BE)

5. Der Betreiber der Abfüllanlage vermutet, dass sich die Ausschußwahrscheinlichkeit vergrößert hat. Um dies zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Flaschen untersucht. Befindet sich darunter mehr als siebenmal Ausschuß, so wird die Vermutung angenommen.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet man sich irrtümlicherweise für eine größere Ausschußwahrscheinlichkeit, obwohl sie sich nicht erhöht hat? (6 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Vergrößerung nicht entdeckt, obwohl sich die Ausschußwahrscheinlichkeit verdoppelt hat? (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ein Spielautomat (Typ I) hat zwei vereckt nebeneinander angeordnete Walzen, deren Mantelflächen jeweils in gleich große, farbige Felder unterteilt sind. Die Felder sind rechteckig nun nehmen die ganze Walzenbreite ein; durch zwei benachbarte Fenster sind die jeweils vorne liegenden Farbfelder sichtbar. Die erste Walze trägt 1 rotes, 4 grüne un 5 weiße Felder, während die zweite Walze 2 rote, 3 grüne und 5 schwarze Felder aufweist. Bei einem Spiel werden die Walzen in Bewegung gesetzt. Sie werden unabhängig voneinander angehalten, und je ein Farbfeld erscheint.

1. (a) Bestimmen sie alle Ergebnisse eines Spiels mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen bei einem Spiel zwei verschiedene Farben? (3 BE)

2. Es wird 10mal gespielt. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Ergeignisse:

   E_1: „Die Farbkombination Rot/Schwarz erscheint mindestens zwei-, aber höchstens viermal" .

   E_2: „Die Farbkombination Weiß/Grün erscheint genau beim 4. und 6. Spiel" .

   E_3: „Die zweite Walze zeigt genau dreimal Rot" . (10 BE)

3. Durch Einwerfen von 1 DM setzt sich der Automat in Bewegung. Erscheinen nach dem Stillstand zwei gleiche Farben, so werden 8 DM ausgeschüttet; erscheint jedoch in einem Feld Tor und im anderen Grün, so wird der Einsatz für das nächste Spiel erlassen. In allen anderen Fällen geschieht nichts. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Spieler nach 2 Spielen eine ausgezahlten Reingewinn von 6 DM und mit welcher einen von 7 DM? (9 BE)

4. Neben dem Gerät des Typs I werden vom Hersteller auch Automaten geliefert, die auf der zweiten Walze 4 rote, 3 grüne und 3 schwarze Felder aufweisen (Typ II). Um Betrug zu verhindern, wurden die Geräte verplombt. Ein Besitzer eines Typ-I-Gerätes vermutet, dass nach einer Reparatur sein Gerät mit einem Typ-II-Gerät vertauscht worden ist. Er will deshalb mit 50 Spielen sein Gerät testen. Erscheint dabei höchstens k-mal die Farbe schwarz, so sieht er seine Vermutung bestätigt.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält der Besitzer ein Typ-II-Gerät irrtümlich für sein Typ-I-Gerät, kalls $k = 20$ ist? (6 BE)

   (b) Bestimmen Sie das größtmögliche k so, dass ein Typ-I-Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% nicht irrtümlich für ein Typ-II-Gerät gehalten wird. (6 BE)