BAYERN Abitur 1992 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{x^2 - k}{x + 1}$$

mit $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $k \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen seien mit G_k bezeichnet.

1. (a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar, und bestimmen Sie die Anzzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k. Achten Sie dabei auf die Definitionsmenge der Funktionen. (5 BE)

   (b) Für welchen Wert von k ist f_k in die Stelle $x = -1$ stetig fortsetzbar? Bestimmen Sie für diesen Fall $\lim\limits_{x \to -1} f_k(x)$. (4 BE)

   (c) Wo schneiden die Graphen der Schar die y-Achse? (1 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Gerade $g : x \mapsto x - 1$ für alle Graphen der Schar mit $k \neq 1$ Asymptote ist.

   Welche Bedeutung hat die Gerade $h : x \mapsto -1$ für die Graphen G_k mit $k \neq 1$? (4 BE)

   (b) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar für $k \neq 1$ mit der Asymptote g gemeinsame Punkte besitzen. (3 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f_k gilt: $f_k'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + k}{(x+1)^2}$. (2 BE)

   (b) Untersuchen Sie für die Fälle $k = 0$, $k = 1$ und $k = 4$, ob die Graphen G_k Extrempunkte besitzen. Bestimmen Sie gegebenfalls Art und Lage. (7 BE)

4. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ die Graphen G_0, G_1 und G_4 in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

   Tragen Sie auch die Geraden g und h (vgl. Teilaufgabe 2a) ein. (8 BE)

5. Berechnen Sie den Inhalt I des Flächenstücks, das von den Graphen G_0 und G_4 sowie den Geraden $x = 0$ und $x = \mathrm{e} - 1$ begrenzt wird. (6 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei mit G_f bezeichnet.

1. (a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen sowie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. (5 BE)

   (b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunktes.
   [Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{2 - 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$] (6 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Bestimmen Sie den Wendepunkt. Zeigen Sie, dass die Wendetangente den y-Achsenabschnitt $t = 0{,}75 + \ln\sqrt{2}$ besitzt. (9 BE)

   (d) Berechnen Sie die Werte von f an den Stellen 3, $-\frac{1}{2}$ und $-\ln 3$, und zeichnen Sie G_f und die Wendetangente im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). (7 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto \frac{1 - 4\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x}}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $I(k) = \int\limits_k^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k \in \mathbb{R})$ gilt:

   $$I(k) = \frac{4\mathrm{e}^k - 1}{2\mathrm{e}^{2k}} - \frac{3}{2}.$$

   (2 BE)

   (c) Bestimmen Sie $I(-\ln 2)$, und beschreiben Sie in der Zeichnung von Teilaufgabe 1d eine Fläche, deren Inhaltsmaßzahl gerade diesen Wert besitzt. (2 BE)

   (d) Bestimmen Sie nun $I(-\ln 3)$, und interpretieren Sie das Ergebnis anhand der Zeichnung von Teilaufgabe 1d. (4 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5|5|-3)$, $B(3|4|-1)$ und $C(5|2|0)$ sowie die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte A,B und C eine Ebene E festgelegt ist, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$] (7 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P von g und E. (3 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $[AC]$ bilden. (6 BE)

   (b) Berechnen Sie für das Dreieck ABC den Radius des Umkreises. (5 BE)

   (c) Der Punkt D bildet mit A, B und C ein Quadrat. Bestimmen Sie die Koordinaten von D. (4 BE)

3. Bestimmen Sie die Gleichung zweier Ebenen F und G, die zu E parallel sind und von E jeweils einen Abstand von 6 Längeneinheiten haben.
   [mögliches Teilergebnis: $F : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 27 = 0$] (6 BE)

4. S_1 und S_2 sind die Spitzen zweier Pyramiden, deren Grundfläche das Quadrat $ABCD$ ist und deren Volumen jeweils 18 Volumeneinheiten beträgt. Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2, wenn zusätzlich gefordert wird, dass S_1 und S_2 auf der Geraden g liegen sollen. (9 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-6|-6|0)$, $B(-4|5|10)$ und $C(8|-1|-2)$ sowie die Gerade g durch den Punkt $T(0|6|0)$ und den Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte A, B und C eine Ebene E festgelegt ist, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$] (7 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M von g und E. Welche besondere Lage hat g zu E? (5 BE)

   (c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes T von der Ebene E. (3 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $[BC]$ bilden. (4 BE)

   (b) Der Punkt A' bildet mit A, B und C eine Raute $ABA'C$. Berechnen Sie die Koordinaten von A'.
   [Ergebnis: $A'(10|10|8)$] (4 BE)

   (c) Zeigen Sie: Der Schnittpunkt M der Geraden g mit der Ebene E ist der Mittelpunkt der Raute. (3 BE)

   (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt J der Raute $ABA'C$.
   [Ergebnis: $J = 216$] (5 BE)

3. Durch die Punkte A und B wird die Gerade h festgelegt.

   (a) Begründen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie den Abstand a der windschiefen Geraden g und h. (Hinweis: Sie können das Ergebnis von Teilaufgabe 2d vorteilhaft einsetzen.) (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ein Laplace-Würfel trägt auf einer Seitenfläche die Augenzahl 1, auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 2 und auf drei Seitenflächen die Augenzahl 3. Bei einem Spiel wird dieser Laplace-Würfel zweimal geworfen.

1. (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   E_1: „Es werden zwei verschiedene Augenzahlen gewürfelt."
   E_2: „Die Augensumme ist ungerade."
   [Teilergebnis: $P(E_2) = \frac{4}{9}$] (6 BE)

   (b) Untersuchen Sie die Ereignisse der Teilaufgabe 1.(a) auf stochastische Unabhängigkeit. (3 BE)

   Nun wird vereinbart: Bei ungerade Augensumme gilt das Spiel als gewonnen.

2. (a) Wie oft muss man mindestens spielen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens einmal gewinnt, größer als $99,9\%$ sein soll? (6 BE)

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das man bei zehn Spielen zwei oder drei Spiele gewinnt. (5 BE)

   (c) Wie oft muss man mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, genau dreimal zu gewinnen, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal zu gewinnen? (9 BE)

3. Jemand behauptet, dass der Würfel gezinkt ist und daher die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen nicht $\frac{4}{9}$, sondern nur $0,3$ beträgt. Um die Behauptung zu überprüfen, spielt er 200mal. Ergeben sich dabei höchstens 75 Gewinnspiele, wird die Behauptung angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird seine Behauptung

   (a) irrtümlich verworfen, (6 BE)

   (b) irrtümlich angenommen? (5 BE)

   Verwenden Sie $0,45$ als Näherung für $\frac{4}{9}$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

In den folgenden Aufgaben wird eine Urne untersucht, in der sich sechs Kugeln befinden, die mit Ziffern beschriftet sind. Eine von ihnen trägt die Aufschrift „1“ , zwei tragen die Aufschrift „2“ und drei die Aufschrift „3“.

1. Es werden zwei Kugeln mit einem Griff entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

   E_1: „Beide Kugeln tragen die Aufschrift ‚3‘.“

   E_2: „Beide Kugeln tragen die gleiche Aufschrift.“

   [Teilergebnis: $P(E_1) = 0,2$] (6 BE)

2. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei vor der Ziehung der zweiten Kugel die erste in die Urne zurückgelegt wird.

   (a) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit der in Aufgabe 1 definierten Ereignisse E_1 und E_2.
   [Teilergebnis: $P(E_1) = 0,25$] (6 BE)

   (b) Wie oft muss diese Ziehung zweier Kugeln durchgeführt werden, damit Ereignis E_1 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einmal eintritt? (6 BE)

3. Es wird folgendes Experiment durchgeführt: Man zieht nacheinander zwei Kugeln, ohne sie jeweils zurückzulegen. Ist die zweite gezogenen Zahl größer als die erste, so zieht man noch eine dritte Kugel, sonst wird die Ziehung nach der zweiten Kugel abgebrochen. Wit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter den gezogenen Kugeln die mit der Aufschrift „1“? (Hinweis: Ein Baumdiagramm kann hilfreich sein.) (11 BE)

   Nun werden 200 Urnen der obengenannten Art betrachtet. Dabei werden jeweils zwei Kugeln auf die geleiche Weise gezogen, ohnen dass bekannt ist, ob die Ziehungen der zweiten Kugeln mit einem Griff oder mit Zurücklegen erfolgt sind. Ist das Ereignis E_1 (vgl. Aufgabe 1) mehr als 45mal eingetreten, so nimmt man an, dass mit Zurücklegen gezogen wurde.

4. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet man sich für Ziehungen mit Zurücklegen, obwohl sie tatsächlich mit einem Griff erfolgten? (6 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man sich irrtümlich für Ziehungen mit einem Griff entscheidet? (5 BE)