BAYERN Abitur 1989 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto 2 \cdot \frac{x+1}{e^{2x}}.$$

Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. (2 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_f an.

   [Zur Kontrolle: $f'(x) = -2 \cdot \dfrac{1+2x}{e^{2x}}$] (6 BE)

   (c) Zeigen Sie nur mit Hilfe der zweiten Ableitung der Funktion f, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt, und stellen Sie eine Gleichung der Wendetangente auf.

   [Mögliches Teilergebnis: $2x + y - 2 = 0$] (8 BE)

   (d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$, und geben Sie eine Gleichung der Asymptoten von G_f an.

   Hinweis: $\lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{z}{e^z} = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden. (3 BE)

   (e) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $[-1; 3]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f(0,5)$ und $f(2)$ sowie die Wendetangente in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm) ein. (6 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto -e^{-2x}(x + 1,5)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Im ersten Quadranten begrenzen die Wendetangente, die x-Achse, die Gerade $x = k$ mit $k > 1$ und der Graph G_f eine Fläche.

   Berechnen Sie den Inhalt $A(k)$ dieser Fläche. (8 BE)

   (c) Kann dieser Flächeninhalt $A(k)$ für $k \to +\infty$ beliebig groß werden?

   Begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben sind die Funktionen

$$h : x \mapsto \frac{x}{4-x} \quad \text{und} \quad f : x \mapsto \ln \frac{x}{4-x}$$

in ihren maximalen Definitionsbereichen $\mathbb{D}_h$ und $\mathbb{D}_f$. Ihre Graphen werden mit G_h bzw. G_f bezeichnet.

1. (a) Geben Sie $\mathbb{D}_h$ und die Nullstelle von h an.
   Untersuchen Sie das Verhalten von h in der Umgebung der Definitionslücke sowie für $x \to \pm\infty$. (4 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion h. (4 BE)

   (c) Skizzieren Sie mit Hilfe Ihrer bisheriegen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-4 \leq x \leq 8$ (Längeneinheit 1 cm). (4 BE)

2. (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und die Nullstelle von f. (4 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von $\mathbb{D}_f$. (3 BE)

   (c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f, und zeigen Sie, dass f streng monoton zunimmt.
   [Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{4}{x \cdot (4-x)}$] (4 BE)

   (d) Weisen Sie nach, dass der Graph G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto x - 2$ Tangente an G_f im Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist. (3 BE)

   (e) Berechnen Sie $f(1)$, $f(1{,}5)$ und $f(3)$. Skizzieren Sie in $\mathbb{D}_f$ die Graphen G_f und G_g in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). (4 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto x \cdot \ln \dfrac{x}{4-x} + 4\ln(4-x)$ in $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Die Graphen G_f und G_g besitzen nur einen gemeinsamen Punkt (Nachweis nicht erforderlich). Bestätigen Sie, dass die Fläche, die von der Geraden $x = 1$ sowie den Graphen G_f und G_g (siehe 2d) begrenzt wird, den Inhalt $-\dfrac{1}{2} + \ln \dfrac{27}{16}$ hat. (6 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|6|-8)$ sowie die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$ nicht auf g liegt. (4 BE)

   (b) Die Ebene E enthält den Punkt M und die Gerade g. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$] (6 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass die Punkte A und B symmetrisch zu E liegen. (6 BE)

   (d) Beschreiben Sie ohne weitere Rechnung möglichst genau die gegenseitige Lage der Geraden AB und g. (5 BE)

2. (a) Die Entfernung $\overline{AB}$ der Punkte A und B beträgt $10\sqrt{2}$ (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie die Punkte C und D auf g, die von A diese Entfernung $\overline{AB}$ haben.
   [Ergebnis: $C(0|8|6)$, $D(10|14|-2)$] (9 BE)

   (b) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die Geraden AC und AD einschließen. (3 BE)

   (c) A, B, C, D sind die Ecken einer dreiseitigen Pyramide. Fertigen Sie eine übersichtliche Skizze an, und begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, dass alle Kanten des Körpers die gleiche Länge besitzen. (7 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma \in \mathbb{R}$ sowie die Punkte $A(6|3|-1)$, $C(2|3|3)$ und $D(10|-1|3)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g, der Punkt C jedoch nicht auf g liegt. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, welche die Gerade g und den Punkt C enthält, in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E : x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$] (6 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf g liegt und gleich weit von A und C entfernt ist.
   [Ergebnis: $B(2|-1|-1)$] (9 BE)

   (d) Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C ein gleichseitiges Dreieck bilden. (4 BE)

   (e) Berechnen Sie den Flächeninhalt J des gleichseitigen Dreiecks.
   [Ergebnis: $J = 8\sqrt{3}$] (2 BE)

2. (a) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Ebene F in Normalenform an, die parallel zur Ebene E durch den Punkt D verläuft. (3 BE)

   (b) F^* ist diejenige Ebene, die aus F durch Spiegelung an der Ebene E hervorgeht. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F^*. (4 BE)

3. (a) Berechnen Sie die Größe des Winkels α zwischen den Geraden g und AD. (3 BE)

   (b) Ermitteln Sie nun unter Verwendung bisheriger Ergebnisse das Volumen V der Pyramide mit den vier Eckpunkten A, B, C und D. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Eine Kugel rollt in einem Wegnetz auf dem kürzesten Weg vom Start in eines der fünf Ziele. Unmittelbar nach dem Start ist für den linken Weg (L) die Wahrscheinlichkeit $0,6$, für den rechten Weg (R) $0,4$. An jeder nachfolgenden Wegverzweigung ist die Wahrscheinlichkeit für den linken Weg (l) und den rechten Weg (r) gleich. Als Ergebnisraum für einen Kugellauf eignet sich die Menge der 4-Tupel $\Omega = \{(Llll), (Lllr), (Llrl), \ldots, (Rrrr)\}$.

1. (a) Geben Sie die Menge der 4-Tupel an, die zu folgenden Ereignissen führen: $A_i :=$ „Die Kugel rollt in das Ziel i“, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (7 BE)

   (b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse? [Teilergebnis: $p(A_5) = 0,05$] (10 BE)

2. (a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1: „Die Kugel bewegt sich nach dem Start zuerst auf dem linken Weg (L)“,
   E_2: „Die Kugel rollt zum Schluß auf dem rechten Weg (r) ins Ziel 2“,
   E_3: $A_2 \cup A_4$ (siehe 1.(a))
   [Teilergebnis: $p(E_3) = 0,5$] (5 BE)

   (b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Ereignisse E_1 und E_2 nicht stochastisch unabhängig sind. (4 BE)

3. Wie oft müsste eine Kugel mindestens starten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal das Ziel 5 zu erreichen? (7 BE)

4. Jemand hat ein Modell dieses Wegenetzes gebaut und möchte seine Annahme testen, dass das Ereignis E_3 aus Teilaufgabe 2.(a) mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$ eintritt. Er hält seine Annahme aber nur dann für bestätigt, wenn von 200 Kugelläufen mindestens 85 und höchstens 115 das Ziel 2 oder das Ziel 4 erreichen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er seine Annahme verwirft, obwohl sie wahr ist? (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ein Spiel besteht aus dem einmaligen, gleichzeitigen Werfen eines Laplace-Würfels W und eines Nicht-Laplace-Tetraeders T. Der Würfel trägt auf seinen Flächen die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, das Tetraeder die Augenzahlen 1, 2, 3, 4. Beim Tetraeder gilt diejenige Zahl als geworfen, die sich auf der Standfläche befindet. Unter „Augensumme" wird die Summe beider geworfener Augenzahlen verstanden. Für T sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$p_{\mathbf{T}}(1) = \frac{1}{12}, \quad p_{\mathbf{T}}(2) = \frac{1}{3}, \quad p_{\mathbf{T}}(3) = \frac{1}{6}, \quad p_{\mathbf{T}}(4) = \frac{5}{12}.$$

1. Es wird ein Spiel durchgeführt.

   (a) Berechnen Sie für alle möglichen Augensummen die Wahrscheinlichkeiten.
   [Teilergebnis: P(„Augensumme 9") $= \frac{7}{72}$, P(„Augensumme 10") $= \frac{5}{72}$] (11 BE)

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   $A :=$ „Die mit dem Tetraeder geworfene Zahl ist gerade",
   $B :=$ „Die Augensumme ist gerade". (5 BE)

   (c) A und B sind stochastisch unabhängig (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(C)$ für $C = \overline{A} \cap B$. Beschreiben Sie $\overline{C}$ mit Worten. (6 BE)

2. Bei einem Spiel wird der Einsatz von 20 Pf verlangt. Gewonnen hat, wer die Augensumme 9 oder 10 erzielt; ihm werden 60 Pf ausbezahlt.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 200 Spielen mindestens 30mal, aber höchstens 40mal zu gewinnen? (6 BE)

   (b) Mit welchem durchschnittlichen Gewinn oder Verlust pro Spiel muss ein Spieler rechnen, wenn er nur häufig genug spielt? (5 BE)

   (c) Ein Spieler vertauscht nun das Tetraeder gegen sein eigenes, von dem er behauptet, dass es von der gleichen Bauart sei. Dies soll akzeptiert werden, wenn bei einem Test mit 50 Spielen mindestens 5mal und höchstens 11mal gewonnen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Tetraeder fälschlicherweise als „gezinkt" verdächtigt wird? (7 BE)