Abiturprüfung 2002

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x - 2 + \frac{4}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

5 a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

7 b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

[zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$]

7 c) Berechnen Sie $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Asymptoten im Bereich $-4 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

6 d) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = -3x + 10$ Tangente an G_f ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes P an. [Teilergebnis: $x_P = 2$]

7 e) G_f, die Gerade g aus Teilaufgabe 1d und die Gerade $x = 3$ begrenzen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A. Berechnen Sie A.

2. Gegeben ist die Funktion $v: t \mapsto v(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$ mit $t \ge 0$.

5 a) Der Graph dieser Funktion soll skizziert werden. Entwickeln Sie den Graphen von v, indem Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem der Reihe nach die Graphen der folgenden Funktionen für $t \ge 0$ skizzieren:

i) $t \mapsto e^{-t}$ ii) $t \mapsto -e^{-t}$

iii) $t \mapsto -e^{-t} + 1$ iv) $t \mapsto v(t)$

3 b) In einem Versuch wird die Geschwindigkeit eines Körpers im durch Reibung gebremsten freien Fall untersucht. Die Funktion v beschreibt näherungsweise die Maßzahl der Geschwindigkeit des verwendeten Körpers in Abhängigkeit von der Maßzahl der Zeit t. Deuten Sie den Graphen von v in diesem Anwendungsbezug. Gehen Sie insbesondere auf das Verhalten für $t \to \infty$ ein.

40

BE	II.
	Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto e^x (x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.
3	1. a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Verhalten von f_a für $x \to +\infty$.
11	b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_a. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_a und geben Sie die Lage des Wendepunktes an. [zur Kontrolle: $f_a'(x) = e^x (x-a+1)$]
4	c) Zeigen Sie, dass der Graph G_1 in ganz $\mathbb{R}$ oberhalb von G_2 verläuft.
9	d) Berechnen Sie $f_1(-3)$ und $f_1(2)$. Zeichnen Sie nun die Graphen G_1 und G_2 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-3 \le x \le 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
2	2. a) Zeigen Sie, dass f_{a+1} für $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist.
4	b) Der Graph G_1, die x-Achse und die y-Achse schließen im 4. Quadranten ein endliches Flächenstück vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A.
4	c) Der Flächeninhalt A aus Teilaufgabe 2b lässt sich durch den Flächeninhalt eines geeigneten Viertelkreises abschätzen. Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) weicht dieser Näherungswert vom exakten Wert ab?
3	d) Beschreiben Sie, welche geometrische Bedeutung der folgende Ausdruck besitzt: $$\int_{-3}^{1} f_1(x)\,dx - \int_{-3}^{2} f_2(x)\,dx$$
40	

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Zur Fernsehshow „Quiz 2002“ sind 2 Damen und 4 Herren als Kandidaten eingeladen.

1. Die Stühle, auf denen die Kandidaten Platz nehmen, sind halbkreisförmig angeordnet. Links und rechts vom Moderator sitzen jeweils 3 Kandidaten. Wie viele Sitzordnungen sind möglich, wenn

3 a) nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?

4 b) nach den Personen unterschieden wird und die beiden Damen auf verschiedenen Seiten des Moderators sitzen sollen?

An einer Quizrunde dürfen zwei der Kandidaten teilnehmen.

2. Zur Auswahl des ersten Teilnehmers würfelt jeder der 6 Kandidaten (genau) einmal mit einem Laplace-Würfel. Wenn einer als Einziger eine Sechs geworfen hat, so darf er an der Quizrunde teilnehmen. Anderenfalls wird das Verfahren wiederholt.

3 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Teilnehmer bereits nach der ersten Würfelrunde feststeht?

[zur Kontrolle: 40,2%]

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der erste Teilnehmer spätestens nach der dritten Würfelrunde fest?

4 3. Zur Auswahl des zweiten Quizteilnehmers müssen die verbleibenden Kandidaten n Städte nach aufsteigender Einwohnerzahl ordnen.
Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, die richtige Reihenfolge ohne Sachkenntnis zufällig zu erraten, kleiner als 2 Promille ist?

4. In der Quizrunde werden Fragen gestellt, die ein Zufallsgenerator aus den Bereichen Politik, Geografie, Film, Musik und Sport auswählt, so dass jeder Bereich mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommt.

4 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 unabhängig ausgewählten Fragen jede aus einem anderen Bereich stammt?

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 10 unabhängig ausgewählten Fragen wenigstens 4 aus dem Bereich Sport?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5. Der Moderator behauptet, dass mindestens 30 % der Zuschauer „Quiz 2002“ mit sehr gut (Note 1) beurteilen.

5 a) Um dies zu testen, sollen 200 zufällig ausgewählte Zuschauer befragt werden. Die Behauptung des Moderators soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 20 % irrtümlich abgelehnt werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich für die Behauptung des Moderators.

Eine Umfrage, bei der 200 Zuschauer die Noten 1 bis 4 vergeben konnten, brachte folgendes Ergebnis:

	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4
männlich	22	55	33	10
weiblich	30	36	14	0

6 b) Berechnen Sie die von den männlichen Zuschauern und die von den weiblichen Zuschauern vergebene Durchschnittsnote auf 1 Dezimale gerundet. Stellen Sie die Verteilung der von den Frauen vergebenen Noten in einem Kreisdiagramm dar (Prozentwerte und zugehörige Mittelpunktswinkel sind anzugeben).

3 c) Der Moderator bezweifelt die Aussagekraft der Umfrage, weil weniger Frauen als Männer befragt worden sind. Unter welcher Voraussetzung könnte man diesen Einwand zurückweisen?

40

BE	**IV.**
	Eine schottische Stadt lädt 10 Jugendliche aus ihrer bayerischen Partnerstadt zu einem Ferienaufenthalt ein.
	1. Die Unterbringung erfolgt in Gastfamilien, von denen 6 ein Mädchen und 4 einen Jungen aufnehmen wollen. Gemäß dieser Vorgabe werden die Teilnehmer aus 15 Interessenten ausgewählt, von denen zwei Drittel weiblich sind.
3	a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen der Gruppe sind möglich?
3	b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die ausgewählten Jugendlichen auf die 10 Gastfamilien zu verteilen?
5	c) Nachdem die Gruppe zusammengestellt worden ist, zieht eine Familie ihre Einladung für ein Mädchen zurück. Glücklicherweise erklären sich aber 3 Familien bereit, ein zweites Mädchen bei sich aufzunehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die weiblichen Gruppenmitglieder auf die für sie verbleibenden 5 Gastfamilien zu verteilen?
	2. Die 10-köpfige Jugendgruppe wird von 2 erwachsenen Betreuern begleitet. Langjährige Erfahrung zeigt, dass aufgrund des regnerischen Klimas im Mittel 12 % der Jugendlichen und 8 % der Erwachsenen während ihres Aufenthaltes an einer Erkältung erkranken (Unabhängigkeit der Erkrankungen wird angenommen).
2	a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Betreuer gesund bleiben?
5	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkranken höchstens 2 der 10 Jugendlichen?
6	c) Wie viele Jugendliche dürften an der Reise nach Schottland höchstens teilnehmen, wenn die gesamte Gruppe einschließlich der beiden Betreuer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 30 % gesund bleiben soll?
	3. Für die Reise haben die beiden Betreuer der Gruppe 12 Plätze für einen Flug in der Economy-Klasse gebucht. Da im Mittel 5 % der Buchungen storniert werden, hat die Fluggesellschaft 200 Tickets für die 190 Plätze der Economy-Klasse verkauft.
3	a) Geben Sie einen Term P(k) an, der beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau k der 200 Buchungen storniert werden. Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit am größten?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Plätze der Economy-Klasse nicht aus?
4	c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben in der Economy-Klasse mehr als drei Plätze frei?
5	d) Tatsächlich stehen 195 Fluggäste mit gültigem Ticket für die Economy-Klasse zum Abflug bereit. Die Fluggesellschaft lässt deshalb 5 davon zufällig auswählen und ohne Aufpreis in der Business-Klasse mitfliegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt genau ein Mitglied der 12-köpfigen Gruppe in den Genuss der besseren Klasse?
40	

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|3|-2)$, $B(-1|-3|4)$ und $C(7|-5|2)$ gegeben.

4 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

4 b) $M(3|-1|0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, für den M die Strecke [BD] innen im Verhältnis 2:1 teilt. [zur Kontrolle: $D(5|0|-2)$]

3 c) Besitzt das Viereck ABCD einen Umkreis? Begründen Sie Ihre Antwort.

4 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

5 2. a) Geben Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E an, in der das Dreieck ABC liegt.
[mögliches Ergebnis: E: $x_1+2x_2+2x_3-1=0$]

5 b) Auf der Lotgeraden zur Ebene E durch M liegen zwei Punkte S und S', die mit den Punkten A und C ein Quadrat bilden. Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte S und S'; benennen Sie dabei den mit S, der die größere x_1-Koordinate besitzt.
[zur Kontrolle: $S(5|3|4)$]

5 c) Das Quadrat ASCS' bildet die Grundfläche einer Pyramide mit Spitze B. Berechnen Sie den Winkel, den die Kanten [AB] und [SB] einschließen, und begründen Sie damit, dass alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

6 d) Es soll ein Kantenmodell der Doppelpyramide ASCS'BD aus Draht hergestellt werden. Beim Verlöten der Drahtstücke gehen 20 % der eingesetzten Drahtlänge verloren. Die Längeneinheit sei 1 cm. Welche Länge Draht, gerundet auf mm, wird benötigt?

4 e) Berechnen Sie das Volumen der Doppelpyramide ASCS'BD.

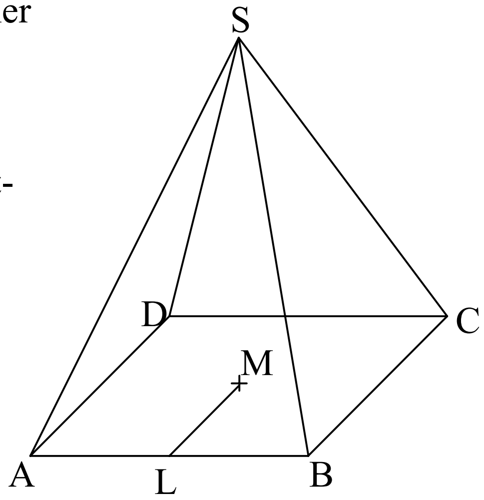
40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $M(-2\,|\,6\,|\,1)$ sowie die Ebenen E: $x_3 - 1 = 0$ und H: $8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ gegeben.

1. In Aufgabe 1 sollen die Eckpunkte einer Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD (siehe Skizze) schrittweise bestimmt werden. Das Quadrat ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M liegt in der Ebene E, die Seitenfläche ABS in der Ebene H.



5 a) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden g, auf der A und B liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

[mögliches Ergebnis: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$]

6 b) Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von M auf die Gerade g. [zur Kontrolle: $L(2\,|\,4\,|\,1)$]

7 c) Bestimmen Sie die Eckpunkte A und B des Quadrats ABCD. Derjenige der beiden Punkte mit der kleineren x_1-Koordinate wird mit A bezeichnet. [zur Kontrolle: $A(0\,|\,0\,|\,1)$]

4 d) Bestimmen Sie jetzt die Eckpunkte C und D des Quadrats ABCD. [zur Kontrolle: $D(-8\,|\,4\,|\,1)$]

6 e) Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene H. Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist der Punkt M. Bestimmen Sie den Punkt S. [zur Kontrolle: $S(-2\,|\,6\,|\,9)$]

2. Der Punkt P ist Mittelpunkt der Pyramidenkante [CS], der Punkt Q Mittelpunkt der Kante [DS].

7 a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Trapezes ABPQ.

5 b) Das Trapez ABPQ zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper. Es wird der Teilkörper betrachtet, der die Spitze S enthält. Der Flächeninhalt des Trapezes ABPQ soll als bekannt vorausgesetzt werden. Beschreiben Sie mit Worten, welche Schritte auszuführen sind, um das Volumen des betrachteten Teilkörpers zu berechnen. Der konkrete Wert des Volumens soll dabei nicht ermittelt werden.

40