Abi 24 Lsg Geo II

A a) Die Kantenlänge des Würfels entspricht der Diagonalenlänge des Oktaeders:

$$k = \left|\vec{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12\checkmark$$

b) Suche den Oktaedermittelpunkt als Mittelpunkt der Diagonalen und addiere dort den auf Länge 6 verlängerten Normalenvektor.

$$\vec{M} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{C}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt des Oktaeders liegt also bei M(-1|-2|5).

Daran angefügt werden soll ein Vektor in Richtung der Normalen der Ebene H mit der Länge 6. Als erstes wird also die Länge des Normalenvektors der Ebenendefinition ausgerechnet:

$$\left|\vec{n}_H\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Der Normalenvektor hat also schon die Länge 3. Daher ist der gesuchte Vektor $\vec{v} = 2 \cdot \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Um an die Spitze zu kommen setzt man diesen Vektor an M an:

$$\vec{S} = \vec{M} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Einer der Eckpunkte, die nicht in H liegen hat also die Koordinaten S(3|0|9).

B a) Der Oberflächeninhalt besteht aus 4 kongruenten Seitenflächen S_i und der Grundfläche G.

Die Grundfläche ist ein Quadrat der Kantenlänge 6, also gilt: $G = 6 \cdot 6 = 36$

Die Fläche einer Seite ist dreiecksförmig mit Grundlinienlänge 6. Die Höhe dieses Dreiecks lässt sich über den Satz des Pythagoras (Dreieckshöhenfußpunkt ist 3LE vom Ursprung O entfernt, S ist wiederum 4LE vom Ursprung O entfernt) berechnen:

$h_S = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Oberfläche einer Dreiecksseite:

$S = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$

Die gesamte Oberfläche der Pyramide ist dann: $O_P = G + 4 \cdot S = 36 + 60 = 96$

b) Alle Symmetrieebenen müssen die Punkte O und S enthalten. Ausprobieren:

(1) enthält O, nicht aber S, da $0 - 4 \neq 0$.

(2) enthält S, nicht aber O, da $0 + 0 + 0 \neq 4$.

(3) enthält S, da $0 + 0 = 0$ und O, da $0 + 0 = 0$.

c) Normalenvektor: $\vec{n'} = \vec{CD} \times \vec{CS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ -18 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ E: $4x_2 + 3x_3 + c = 0$ mit S in E: $4 \cdot 0 - 3\dot{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$

Ebenengleichung E:$4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$✓

d) Man legt von P aus eine Gerade senkrecht durch E und sucht den Schnittpunkt Q. Der Abstand von P zum Schnittpunkt Q muss dem Abstand von p zur Grundfläche entsprechen.

e) Setze S in die Schar ein:

$4k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 12 = 0\checkmark$

Egal für welchen Wert von k: S ergibt, eingesetzt in E_k immer eine wahre Aussage.

f) Die jeweiligen Normalenvektoren sind $n_k = \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}$

Zwischenwinkel zum Vektor $\vec{OS}$: $cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{|\vec{n_k}| \cdot 4}$

$= \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{4^2k^2+4^2-4^2k^2+3^2} \cdot 4} == \frac{12}{\sqrt{4^2+3^2} \cdot 4} = \frac{12}{5 \cdot 4} = const$

g) Da ADS in E_{-1} liegt und BCS in E_1 muss jeweils der Mittelpunkt der Grundlinie den kürzesten Abstand zu O haben. Also $R_{-1}(-3|0|0)$ und $R_1(3|0|0)$.

h) Es entsteht ein halber Kegel.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 4 = \frac{1}{6}\pi \cdot 36 = 6\pi.$