# Abi 23 Lsg Ana I

A 1 a) $f : x \mapsto ln(x-3)$

Das Argument der Ln-Funktion darf nicht 0 oder kleiner 0 sein:

$x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

$D = ]3;\infty[$.

$ln(x-3)=0 \qquad |e^{()}$

$e^{ln(x-3)} = e^1$

$x-3=1$

$x=4$

b) $f'(x) = \frac{1}{x-3}$

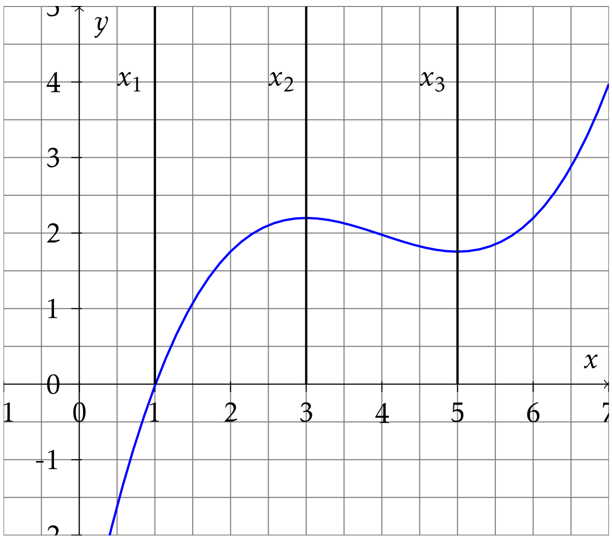
$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2\cdot(x-3) \Leftrightarrow 1 = 2x-6 \Leftrightarrow x = 3,5$

2 a) Waagrechte Asymptote: $y=-1$.

Wertemenge: $W_g = ]-1;+\infty[$

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2} - 1dx = \left[-\frac{1}{x} - x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{1}{2} - 2 - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) = 0$

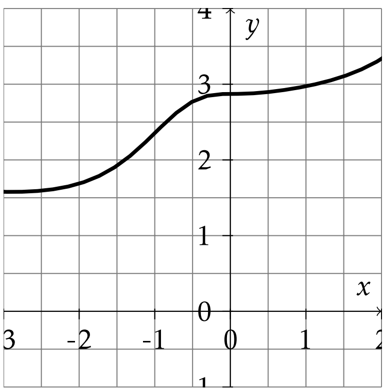
3 a) Die Ableitung der ganzrationalen Funktion hat zwei Nullstellen, nämlich bei $x_2$ und $x_3$. Daher ist die Ableitungsfunktion mindestens zweiten Grades, also muss f mindestens 3. Grades sein.




b)

4 a) Der Graph von h geht aus dem Graphen von g hervor, indem dieser um drei nach rechts verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt wird. Also liegt der Tiefpunkt bei (2|-1).

b) Zeichnung



B 1 a) $f(0) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot 0^2} = 2 \cdot 1 = 2$

$f(-x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot (-x)^2} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x^2} = f(x)$

Die Funktion ist also achsensymmetrisch.

b) Zur Bestimmung der Tangentensteigung wird die Ableitungsfunktion benötigt:

$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot 2x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{8}(-2)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$

Gleichung der Tangente w:

$w : y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + t$

$2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + t$

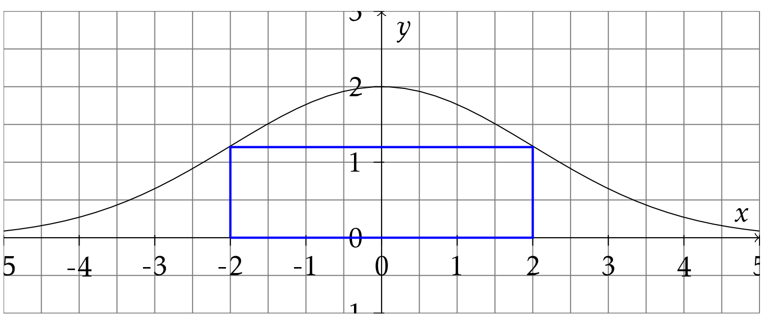
$4e^{-\frac{1}{2}} = t$

$w : y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$

Nullstelle der Tangente w:

$0 = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = -4$

c) 


d) $f(c) - 0 = 1 \Leftrightarrow f(c) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = 0,5$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}c^2 = -ln(2) \Leftrightarrow c^2 = 8 \cdot ln(2) \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2\ln(2)} \approx 2,35$

e) Breite des Rechtecks: $b = 2c$

Höhe des Rechtecks: $h = f(c) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2}$

Flächeninhalt: $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2}$

f) $A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} + 4c \cdot \left(e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}c\right)\right)$

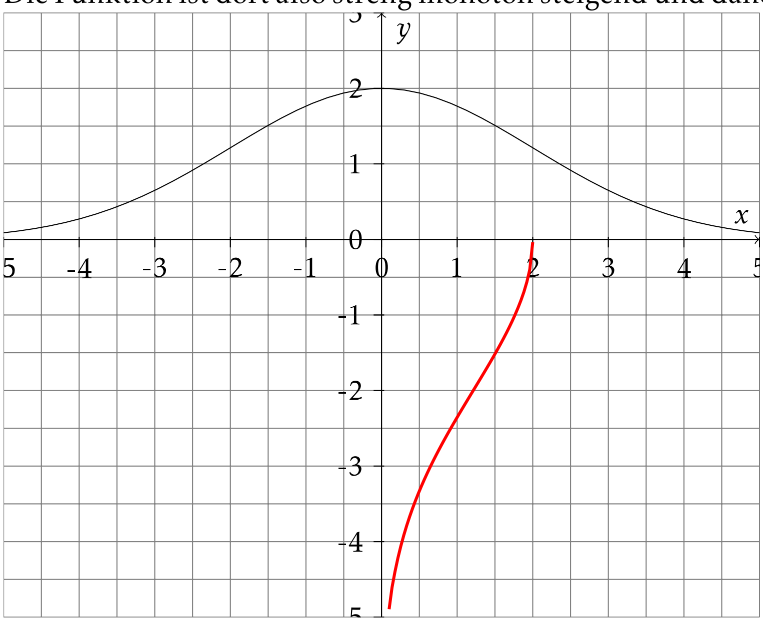
$= e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} \cdot \left(4 - c^2\right)$

$A'(c) = 0 \Leftrightarrow 4 = c^2 \Leftrightarrow c = -2 \vee c = +2$

g) $f_k'(x) = f'(x)$, da sich die einzelnen Funktionen nur durch die additive Konstante k unterscheiden, die beim Ableiten wegfällt.

Im Definitionsbereich $x \leq 0$ gilt: $f'(x) = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0}}_{>0}$

Die Funktion ist dort also streng monoton steigend und daher auch umkehrbar.




h) Gemeinsame Werte mit der Umkehrfunktion gibt es nur, wenn sie sich auf der Winkelhalbierenden $y = x$ treffen.

Suche also gemeinsame Punkte von $f_k(x)$ mit $w(x) = x$.

Solche Werte kann es nur geben, wenn der Graph der Funktion um 2 oder mehr nach unten verschoben wird. Daher gilt für das Intervall:

$k \in ]-2;+\infty[$

2 a) Bretie: 8m; Höhe: 2m;

b) Nur für $a < 0$ hat der Graph von g einen Hochpunkt und ist nach unten geöffnet; nur für $b > 0$ schneidet er die y-Achse oberhalb der x-Achse.

c) Der Graph III kann ausgeschlossen werden, da f(x) an der Stelle x=4 eine Nullstelle haben müsste ($F_{III}(x)$ hat dort ein Maximum).

Der Graph II kann ausgeschlossen werden, da der Flächeninhalt zwischen Graph $G_f$ und x-Achse im ersten Quadranten den Wert 2 deutlich überschreitet.

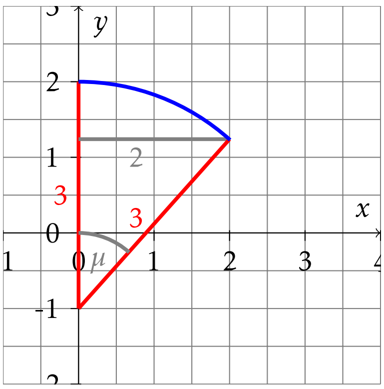
d) Ermittlung ohne Fenster: $F(4) - F(-4) \approx 10$, also etwa 10 $m^2$.

Zur Bestimmung von a:

Damit der schraffierte Teil 6 $m^2$ einnimmt, muss das Fenster eine Flächen 4 $m^2$ einnehmen. Also muss gelten:

$\int_r^s \left(ax^4 + 1,5\right) dx = 4$, wobei r und s die Nullstellen der Funktion sind, die sich aus a ergeben.

e) Skizze




Die Strecke von $M(0|-1)$ nach $P(2|y_k)$ hat die Länge 3. Damit ergeben die Punkte $M$, $(0|y_k)$ und $P$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel $\mu$ bei M mit dem Winkel des Kreisbogens übereinstimmt. Also gilt:

$sin(\mu) = \frac{2}{3} \Rightarrow \mu = 41^o$

Winkel für alle 4 Bögen: $4\mu = 167,24^o$

Bogenlänge: $b = \frac{\mu}{360^o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 8,76$

Die Länge des oberen Randes beträgt etwa 8 Meter und 80 cm.