

Abi 23 Lsg Ana II

A 1 a) Nenner darf nicht 0 sein:

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}.$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b) f'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 2)^2} = e^x \cdot \frac{e^x - 2 - e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x - 2)^2}$$

2 a) $g(1) = 2$

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + t$$

$$\text{An der Stelle } x=1: 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + t \Rightarrow t = 1,5$$

b) $\sqrt{y} + 1 = x$

$$\sqrt{y} = x - 1$$

$$y = (x - 1)^2$$

$$3 a) \int_0^{2a} -x^2 + 2ax dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} = -\frac{1}{3} \cdot 8a^3 + a \cdot 4a^2 - 0 = 4a^3 - \frac{8}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3 \checkmark$$

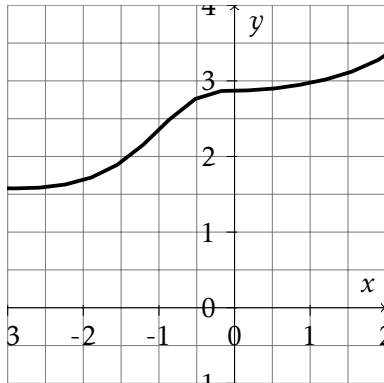
b) x-Koordinate des Scheitelpunkts: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2a = 0 \Leftrightarrow x = a$
Höhe im Scheitelpunkt $f(a) = -a^2 + 2a \cdot a = -a^2 + 2a^2 = a^2$

$$\text{Bedingung für das Quadrat: } a^2 \cdot a^2 = \frac{4}{3}a^3$$

$$a^4 = \frac{4}{3}a^3 \quad a \neq 0$$

$$a = \frac{4}{3}$$

- 4 a) Der Graph von h geht aus dem Graphen von g hervor, indem dieser um drei nach rechts verschoben und dann an der x -Achse gespiegelt wird. Also liegt der Tiefpunkt bei $(2|-1)$.
- b) Zeichnung



B 1 a) Momentane Änderungsrate der Staulänge $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$

Änderungsrate hat den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist:

$$x = 0 \vee x = \frac{8}{5} \vee x = 4$$

Nachdem keine weiteren Faktoren existieren, kann auch keine weitere Nullstelle gefunden werden.

- b) f beschreibt die lokale Änderungsrate der Staulänge. $f(2) < 0$ bedeutet, dass die Staulänge zum Zeitpunkt $t = 2$ h gerade abnimmt.
- c) In der Grafik sieht man, dass es ein Maximum der lokalen Änderungsrate kurz nach Beginn der Zeitmessung gibt. Dieses wird nun berechnet.

$$f'(x) = (5x^2 - 16x + 8) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) \text{ (laut Angabe)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 8 = 0 \vee x = 4$$

Für $x = 4$ ist in der Grafik zu erkennen, dass es sich nicht um das gesuchte Maximum handelt.

$$5x^2 - 16x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{10} = 1,6 \pm 0,4 \cdot \sqrt{6}$$

$$x_1 = 1,6 - 0,4 \cdot \sqrt{6} : f'(0) = 8 > 0 \wedge f'(1,6) \approx -2,88 < 0 \Rightarrow \text{HOP}$$

$$x_2 = 1,6 + 0,4 \cdot \sqrt{6} : f'(1,6) \approx -2,88 < 0 \wedge f'(3) = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow \text{TIP}$$

$$x_1 = 1,6 - 0,4 \cdot \sqrt{6} \approx 0,62$$

Nach 0,62 Stunden nimmt die Staulänge am stärksten zu.

- d) Zum Zeitpunkt $x = \frac{8}{5} = 1,6$ ist der Flächeninhalt unter G_f am größten, also der Stau am längsten. Danach nimmt die Staulänge ab.
- e) Wenn s die Funktion ist, die die Staulänge angibt, dann muss gelten:

$$s'(x) = f(x)$$

$$s'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x = f(x) \checkmark$$

$$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 \Rightarrow s(4) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 \cdot (4-4)^3 = 0$$

Um 10:00 ist die Staulänge 0.

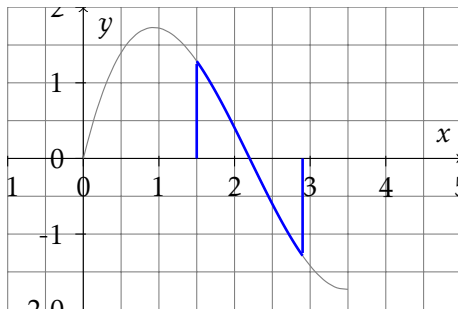
$$f) Z = s(2) - s(0,5) = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot (4-2)^3 - \left(\frac{0,5}{4}\right)^2 \cdot (4-0,5)^3$$

$$= \frac{681}{512} \approx 1,33$$

Die Staulänge nimmt im angegebenen Zeitintervall um 1,33 km zu.

Mittlere Zunahme pro Zeit: $1,33 : 1,5 \approx 0,89$ Die Staulänge nimmt in dem Zeitintervall mit durchschnittlich 890m pro Stunde zu.

- g) 7:30 entspricht $x = 1,5$. Zwischen 1,5 und 2,2 nimmt die Staulänge zu, dann nimmt sie wieder ab. Irgendwann hat die Staulänge soviel abgenommen, dass wieder der Stand von 7:30 erreicht ist.



- 2 a) Es handelt sich um die Potenzfunktion $p(x) = x^k$, die um 3 in positiver x-Richtung und 1 in positiver y-Richtung verschoben ist. Daher gilt für geradzahlige k: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3)^k + 1 = +\infty$

und für ungeradzahlige k: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3)^k + 1 = -\infty$

- b) Wegen der Verschiebung ergeben sich statt $O(0|0)$ und $P(1|1)$ die verschobenen Punkte $O'(3|1)$ und $P'(4|2)$ als gemeinsame Punkte aller Graphen.
 c) Damit ein Graph Tangente sein kann muss es sich um eine Gerade handeln. Damit bleibt nur $k = 2$, denn dann ist die Ableitungsfunktion eine lineare Funktion. In diesem Fall ergibt sich:

$$h_2(x) = (x-3)^2 + 1 \quad h_2'(x) = 2x - 6$$

Gesucht sind also Stellen von h_2 an denen die Steigung der Geradensteigung $m = 2$ entspricht. $h_2'(x) = 2x - 6 = 2$

$$2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

An der Stelle $x = 4$ hat also $h_2(x)$ die Steigung 2. Berührt die Gerade $2x-6$ dort auch den Graphen?

$$h'_2(4) = 2 \quad h_2(4) = (4 - 3)^2 + 1 = 2\checkmark$$

Die Ableitungsfunktion ist also tatsächlich Tangente am Graphen und zwar an der Stelle $x = 4$.

- d) In einem Trapez sind zwei Seiten parallel. Laut Zeichnung sollte $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ gelten. Dies ist aber selbstverständlich, da R und S die gleiche x-Koordinate ($x=2$) und P und Q die gleiche x-Koordinate ($x=4$) besitzen.

Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich zu $h \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+c)$. Für alle Trapeze in dieser Aufgabe gilt $h = 2$.

$$h_k(2) = (-1)^k + 1 \quad h_k(4) = 2$$

$$h'_k(2) = k \cdot (-1)^{k-1} \quad h'_k(4) = k$$

FI des Trapezes für k (k gerade):

$$\frac{1}{2} \cdot ((k - 2) + (2 - (-k))) \cdot 2 = 2k$$

FI des Trapezes für k+1 (k ungerade):

$$\frac{1}{2} \cdot ((k + 1 - 2) + (k + 1)) \cdot 2 = 2k$$