

## Abi 22 Lsg Ana I

A 1 a)  $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$

Definitionsmenge: Der Nenner darf nicht Null sein:  $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Nullstellen:

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x+2) = 0$$

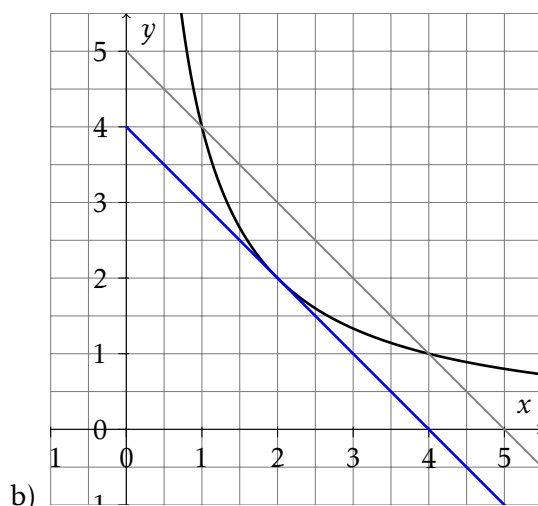
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

- b) Term einer gebrochen rationalen Funktion  $h$ . Die Funktion hat eine waagrechte Asymptote und ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, dann bietet sich die e-Funktion an:

$$h: x \mapsto e^x + 3$$

Diese Funktion schneidet die y-Achse bei  $e^0 + 3 = 4 \checkmark$

2 a)  $\int_1^e \frac{4}{x} dx = [4 \ln(x)]_1^e = 4 \ln(e) - 4 \ln(1) = 4 - 0 = 4$



Dies scheint bei  $x_0 = 2$  der Fall zu sein.

3 a)  $f(6) = 2$  (bei  $x=6$  den Funktionswert ablesen)

$$g(6) = f(f(6)) = f(2) = 3$$

b)  $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$0 = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

1.Fall:  $f'(x) = 0$ . Laut Angabe ist das genau dann, wenn  $x_1 = 3$ .

2.Fall:  $f'(f(x)) = 0$ . Hier muss  $f(x) = 3$  sein, da nur  $f'(3) = 0$ . Beim Betrachten des Graphen gibt es genau zwei Stellen, die den Funktionswert  $y = 3$  haben:  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 6$ .

Für  $x \in \{2; 3; 6\}$  hat der Graph von  $g$  eine waagerechte Tangente.

4 a)  $f'_a(x) = -a \cdot e^{-x} + 0 = -a \cdot e^{-x}$

$$f'_a(0) = -a \cdot e^{-0} = -a \cdot 1 = -a \checkmark$$

b) Die Tangente ist durch die Gleichung  $y = m \cdot x + t$  bestimmt.

Aus Teilaufgabe a ist bekannt, dass  $m = -a$  gilt.

Der y-Achsenabschnitt  $t$  lässt sich ebenfalls leicht berechnen, da  $t = f_a(0) = a \cdot e^{-0} + 3 = a + 3$  gilt.

Die Gleichung der Tangente ist also:  $y = -a \cdot x + a + 3$

Für eine positive Steigung muss  $m > 0 \Rightarrow a < 0$  gelten.

Die Nullstelle der x-Achse (Schnittpunkt mit der x-Achse) findet man mit:

$$0 = -a \cdot x + a + 3$$

$$-a - 3 = -a \cdot x$$

$$\frac{a+3}{a} = x$$

$$1 + \frac{3}{a} = x$$

x soll größer als 0,5 sein:

$$1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{a} > -\frac{1}{2} \quad | \text{ (Kehrwert)}$$

$$\frac{a}{3} < -2$$

$$a < -6$$

Zur Verdeutlichung, wird für die Lösung der Aufgabe nicht gebraucht:

Beispiel:  $a = -12$ . Dann ist die Geradengleichung:

$$y = 12x - 12 + 3 = 12x - 9$$

Steigung ist positiv ✓.

Schnittpunkt mit der x-Achse:  $0 = 12x - 9 \Rightarrow 9 = 12x \Rightarrow 3 = 4x \Rightarrow \frac{3}{4} = x > \frac{1}{2}$  ✓

B  $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$       $D_f = [0; 10]$

a)  $2 \cdot \sqrt{10x - x^2} = 0$

Die Wurzel ist dann Null wenn ihr Argument Null ist.  $10x - x^2 = 0$

$$x \cdot (10 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 10$$

b)  $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10x-x^2}} \cdot (10 - 2x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 5$$

$f(5) = 10$ , Extrempunkt ist also  $E(5|10)$ .

Die Funktion ist im Definitionsbereich stetig, sowohl  $f(0) = 0$  als auch  $f(10) = 0$ . Da  $f(5) > 0$  muss E ein Hochpunkt sein.

c) Sowohl 50 als auch  $\sqrt{10x - x^2}$  sind positiv. Rechtskrümmung bedeutet, dass  $f''(x) < 0$  ist, also muss der Faktor links im Nenner im Intervall  $[0; 10]$  negativ sein. Das gilt nur für  $(x^2 - 10x)$ , denn z.B.  $5^2 - 10 \cdot 5 = -25$ . Also ist I der Term für die zweite Ableitungsfunktion.

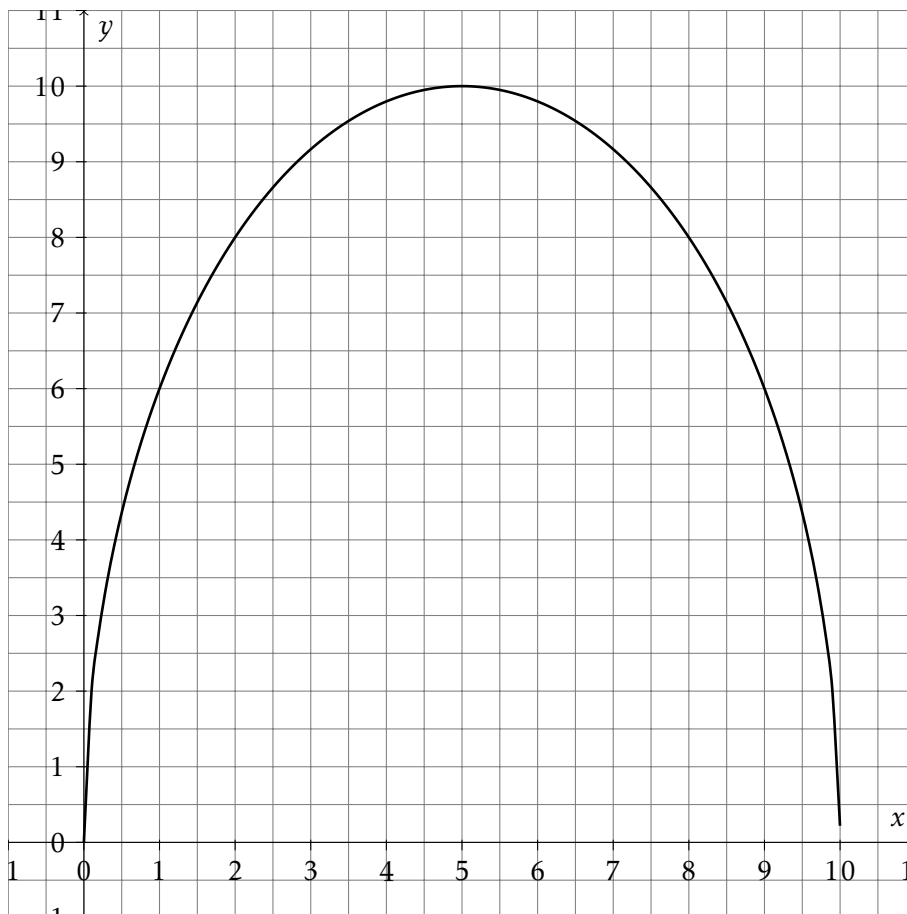
d)  $f(5 - x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 - x) - (5 - x)^2} = 2\sqrt{50 - 10x - 25 + 10x - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2}$

$$f(5 + x) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot (5 + x) - (5 + x)^2} = 2\sqrt{50 + 10x - 25 - 10x - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2}$$

$x = 5$  ist eine senkrechte Gerade. Berechne ich einen Funktionswert, der um  $x$  von dort in negativer  $x$ -Richtung entfernt ist, so erhalte ich den gleichen Funktionswert, wenn ich um dieses  $x$  in positiver  $x$ -Richtung entfernt bin. Also ist der Graph symmetrisch zu  $x = 5$ .

e) Der maximale Definitionsbereich für  $f'(x)$  ist  $]0; 10[$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ , da der Nenner gegen Null und der Zähler gegen Zehn strebt.

f)  $f(8) = 2 \cdot \sqrt{80 - 64} = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$



$$g) f'(2) = \frac{10-2 \cdot 2}{\sqrt{10 \cdot 2 - 2 \cdot 2}} = \frac{6}{\sqrt{20-4}} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\tan(\alpha) = 1,5 \Rightarrow \alpha = 56,31^\circ$$

h) Breite des Rechtecks:  $2 \cdot (5 - s)$

$$\text{Höhe des Rechtecks: } f(s) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot s - s^2}$$

Länge der Diagonalen d:

$$d^2 = 4 \cdot (5 - s)^2 + 4 \cdot (10 \cdot s - s^2)$$

$$= 4 \cdot (25 - 10s + s^2) + 4 \cdot (10s - s^2)$$

$$= 100 - 40s + 4s^2 + 40s - 4s^2 = 100$$

$$\Rightarrow d = 10\sqrt{\quad}$$

i) Wird das Loch in 3,6m Höhe gebohrt, so spritzt das Wasser 9,6m weit.

j)  $f(x) = 6$

$$2\sqrt{10x - x^2} = 6$$

$$\sqrt{10x - x^2} = 3$$

$$10x - x^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4$$

Das Loch muss also entweder auf 1 Meter - oder auf 9 Meter Höhe gebohrt werden.

Das Maximum der Spritzweite wird auf einer Höhe von 5 Metern erwartet.

$$\text{k) } \Delta V = \int_0^{60} 0,25t - 25dt = \left[ 0,125t^2 - 25t \right]_0^{60} = 0,125 \cdot 3600 - 25 \cdot 60 - 0 = 450 - 1500 = -1050$$

Es fließen 1050 Liter ab.