

Abi 21 Lsg Geo I

$$A \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Gesucht ist der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade g. Dann steht die Gerade AB senkrecht auf der Geraden g und somit auch senkrecht auf der Geraden h.

$$\begin{aligned} \vec{AX} \circ \vec{u} &= 0 \\ (\vec{X} - \vec{A}) \circ \vec{u} &= 0 \\ \left(\begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ (-1+3\lambda) \cdot 3 + (7+4\lambda) \cdot 4 + 2 \cdot 0 &= 0 \\ -3 + 9\lambda + 28 + 16\lambda &= 0 \\ 25 + 25\lambda &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- b)

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

B a)

$$|\vec{SA}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$|\vec{SB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Zwei Schenkel des Dreiecks sind also gleichlang, das Dreieck ist gleichschenkelig.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alle Punkte des Quadrats haben die z-Koordinate 4, also liegt E parallel zur xy-Ebene.

b)

$$\vec{SA} \times \vec{SB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x + y - 2z + c = 0$$

S einsetzen:

$$-2 + c = 0$$

$$c = 2$$

$$x + y - 2z + 2 = 0 \checkmark$$

c)

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} |\vec{BC}|^2 \cdot 3$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 0^2} \cdot 3$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{72} \cdot 3$$
$$= 72 \checkmark$$

- d) Zu ermitteln ist der Abstand des Mittelpunktes $M(0|0|4)$ der Kugel von den Seitenflächen, also z.B. von der Ebene F:

Bringe F in die Hesse-Normalform und setze M ein:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{HNF(F): } \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z + \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{M einsetzen: } -\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 4 + \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

$$\text{Abstand: } d = \left| -\sqrt{6} \right| = \sqrt{6} \checkmark$$

$$\text{Durchmesser: } D = 2\sqrt{6} \approx 4,9$$

Die Kugel hat einen Durchmesser von etwa 49cm.

- e) Der Mittelpunkt befindet sich genau 40cm über dem Boden. Dazu kommt noch der Radius also $\sqrt{6}$ dm, das sind etwa 24cm, also in Summe 64 cm
- f) Setze die Koordinaten der Fontäne in die Ebenengleichung ein:

$$0 = 1 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t+1) - 2 \cdot (6,2 - 5 \cdot (t-0,2)^2) + 2$$

$$0 = 2t + 2 - 12,4 + 10 \cdot (t^2 - 0,4t + 0,04) + 2$$

$$0 = 2t - 8,4 + 10t^2 - 4t + 0,4$$

$$0 = -2t + 10t^2 - 8$$

$$0 = 10t^2 - 2t - 8$$

$$t_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{20} = \frac{1}{10} \pm \frac{18}{20}$$

$$= 0,1 \pm 0,9 = 1 \text{ (t darf nicht kleiner Null sein)}$$

Es ergibt sich $P(2|2|3)$ als Schnittpunkt der Fontäne mit Ebene F.

- g) Die Höhe der Fontäne wird durch die z-Koordinate des Punktes L_t ausgedrückt. Diese wird am größten, wenn der quadratische Term am kleinsten, also Null ist. Dies ist für $t = 0,2$ der Fall. Dann hat die z-Koordinate den Wert 6,2 und dieser liegt unterhalb von 6,4.
- h) Zuerst muss man das zu füllende Volumen bestimmen. Dieses besteht aus dem Volumen der Pyramide ohne das Volumen der in ihr liegenden halben Marmorkugel:

$$V' = 72 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \approx 72 - 30,78 = 41,22$$

Da die Modelllänge 1dm entspricht, beschreibt das Modellvolumen einen $1dm^3$
also 1 Liter:

$$t \approx 41,22 : 0,08s = 515,24s$$

Es dauert etwa 515 Sekunden.