Abi 19 Lsg Ana I

A 1 $f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x - 1 \cdot e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{2x}}_{>0} \cdot (2x-1) = 0$

$f'(x) = 0$, wenn $2x - 1 = 0$, also $x = \frac{1}{2}$.

VZT	$x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
G_f	$\searrow$	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

$f(\frac{1}{2}) = 2e \Rightarrow (TIP)(\frac{1}{2}|2e)$

2 a) Schnittpunkte:

$1 - \frac{1}{x^2} = -3$
$-\frac{1}{x^2} = -4$ | Kehrbruch

$x^2 = \frac{1}{4}$ | radizieren

$x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$

b) $A = 2 \cdot \left(\left|(-3) \cdot \frac{1}{2}\right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 - \frac{1}{x^2} dx \right| \right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 - x^{-2} dx \right| \right)$

$= 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \left| \left[x + x^{-1} dx \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| \right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + |2 - 2,5| \right) = 2 \cdot 2 = 4$

3 a) Es handelt sich um Graph I

Graph II kann es nicht sein, da seine Nullstellen nicht mit den Extremstellen von G_f übereinstimmen.

Graph III kann es nicht sein, da der Steigungswert von G_f bei $x = 0$ einen Betrag hat der kleiner als eins ist. Graph III gibt jedoch bei x=0 einen Betrag von 2 für die Steigung an.

b) G_F ist im Intervall $[1; 3]$ strng monoton fallend, da die Funktionswerte von f in diesem Intervall alle negativ sind.

4 $k = \pi$. Dort hat der Graph von $cos(x)$ eine waagerechte Tangente und ein Maximum. Für jedes $k > \pi$ besitzt der Graph zu zwei unterschiedlichen x-Werten einen gleichen y-Wert und ist demzufolge nicht mehr umkehrbar.

$f(x) = e^x + 1$ oder $g(x) = x + 1$ oder $g(x) = x - 1$...

B 1 a) $x - 1 > 0$

$x > 1$

also $D_f =]1;\infty[$✓

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{2 - \underbrace{ln(x-1)}_{\to -\infty}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \underbrace{2 - \underbrace{ln(x-1)}_{\to \infty}}_{\to -\infty} = -\infty$$

b) $2 - ln(x-1) = 0 \quad | \quad + ln(x-1)$

$2 = ln(x-1) \quad | \quad e^{()}$

$e^2 = x - 1 \quad | \quad +1$

$e^2 + 1 = x$

c) Der Graph wird um 1 in positiver x-Richtung verschoben, an der x-Achse gespiegelt und dann um 2 in positiver y-Richtung verschoben. Durch die Spiegelung an der x-Achse ergibt sich ein streng monoton fallender Graph, da die Grundfunktion streng monoton steigend ist und Verschiebungen keinen Einfluss auf die Monotonie haben.

d) $F'(x) = 3 - 1 \cdot ln(x-1) - (x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = 3 - ln(x-1) - 1 = 2 - ln(x-1)$✓

Alle Stammfunktionen: $F_c(x) = 3x - (x-1) \cdot ln(x-1) + c$

$F_c(2) = 0$

$3 \cdot 2 - (2-1) \cdot ln(2-1) + c = 0$

$6 - 1 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -6$

$F_6(x) = 3x - (x-1) \cdot ln(x-1) - 6$

2 a) f(2) beschreibt diejenige Linie im Raum, an der es vom waagerechten Plateau aus wieder abwärts geht.

Da es sich um eine symmetrische Spiegelung an der y-Achse handelt, muss x durch -x ersetzt werden:

$q(x) = 2 - ln(-x-1)$

b) Mittlere Änderungsrate in diesem Intervall:

$m(x) = \frac{f(8)-f(2)}{6} = \frac{2-ln(7)-0}{6} = \frac{2-ln(7)}{6} \approx -0,32432$

Ableitungsfunktion: $f'(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{2-ln(7)}{6} \Rightarrow 1-x = \frac{6}{2-ln(7)} \Rightarrow x = 1 + \frac{6}{ln(7)} \approx 4,1$

c) Die Punkte (2|f(2)) und (8|f(8)) durch eine Gerade verbinden. Diese parallel verschieben bis sie den Graphen berührt. Die x-Koordinate des Berührpunktes bestimmen.

d) $f'(2) = \frac{1}{1-2} = -1$

Der Winkel beträgt also 135^o.

e) $A = 2 \cdot |(F(6) - F(2))| = 2 \cdot 3,9528 \approx 8$

Es stehen etwa 8 Quadratmeter zur Verfügung

3 a) 1. Fall $k < 0$:

$\lim_{x \to -\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = -\infty$

(Die höchste Potenz entscheidet und hat mit $k < 0$ einen negativen Koeffizienten - Spiegelung an der x-Achse)

2. Fall $k > 0$:

$\lim_{x \to -\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} kx^3 + (k+1)x^2 + 9x = +\infty$

(Die höchste Potenz entscheidet und hat mit $k > 0$ einen positiven Koeffizienten)

b) $f'(x) = 3kx^2 + 6(k+1)x + 9$

$f''(x) = 6kx + 6(k+1)$

Ein Wendepunkt befindet sich an Stellen mit Krümmung 0:

$0 = 6kx + 6(k+1)$

$0 = kx + k + 1$

$-kx = k + 1$

$x_W = -\frac{k+1}{k} = -1 - \frac{1}{k}$

c) "Wendepunkt auf der y-Achse" bedeutet, dass die x-Koordinate des Wendepunktes 0 sein muss.

$x_W = 0 = -1 - \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = -1 \Rightarrow k = -1$

Für $k = -1$ liegt der Wendepunkt genau auf der y-Achse. Diese Funktion schaut dann so aus:

$f_{-1}(x) = -x^3 + (-1+1)x^2 + 9x = -x^3 + 9x$

$f_{-1}(0) = -0^3 + 9 \cdot 0 = 0 \checkmark$

Steigung der Tangente am Wendepunkt (der war ja bei x=0):

$f'_{-1}(x) = -3x^2 + 9$

$f'_{-1}(0) = 9 \checkmark$

d) Die dargestellte Steigung zeigt 3 Kästchen in der Höhe auf eines in x-Richtung. Dies soll der Steigung 9 entsprechen. Also gehören im Quadrat drei Höheneinheiten zu einer Rechtseinheit. Somit müssen die "Lücken" mit den Zahlen 3; 6; 9; 12 und so weiter gefüllt werden.