Abi 19 Lsg Ana II

A 1 a) Der Radikand darf nicht negativ sein: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_g = [-1;\infty[$

b) $g(x) = \sqrt{x+1} - 2 \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$a(x) = m \cdot x + t$

$m = g'(8) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

$g(8) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow P(8|1)$ liegt auf der Tangente

$1 = \frac{1}{6} \cdot 8 + t \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Gleichung der Tangente: $a(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$

2 a) $f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$

b) $A = 1 \cdot 3 + 2 \cdot \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 - x^{-2} dx \right| = 3 + 2 \cdot \left| [x + x^{-1}]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| = 3 + 2 \cdot |(2 - 2,5)| = 4$

3 $p_k(x) = kx^2 - 4x - 3 \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) $p_k(2) = -3 \qquad k \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -3$

$4k - 11 = -3 \Rightarrow k = 2$

b) $D < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 16 + 12k < 0 \Rightarrow k < -\frac{4}{3}$

4 a) Graph II hat keine Nullstellen bei den Extrema von f, fällt daher aus.
Graph III besitzt den Wert -2; die Steigung des Graphen von f besitzt jedoch bei 0 einen Wert der vom Betrag kleiner als 1 ist. Daher kommt Graph III auch nicht in Frage.
Graph I stellt also die Ableitungsfunktion korrekt dar.

b) In diesem Intervall ist f(x) überall negativ. Also wird die Stammfunktion F dort streng monoton fallend sein.

B 1 a) $f(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

Da x im Nenner quadratisch vorkommt, wächst der Nenner für große x stärker als der Zähler, der gesamte Term geht gegen 0.

b) $f'(x) = \frac{4(x+1)^2 - 4x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$

$f'(x) = \frac{4(x+1) \cdot (x+1-2x)}{(x+1)^4}$

$f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

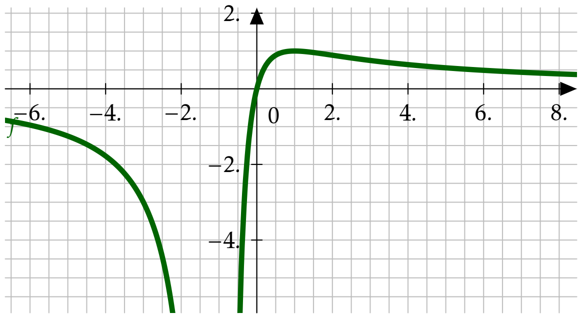
$f'(0) > 0 \qquad f'(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt.

$f(1) = \frac{4}{4} \Rightarrow$ es handelt sich um einen Hochpunkt bei $H(1|1)$

c) Der Nenner ist stets positiv, Wenn x negativ ist, dann ist der Zähler 4x stets negativ. Also muss der Wert des Bruches negativ sein.

$f(-3) = \frac{-12}{(-3+1)^2} = -\frac{12}{4} = -3$

Graph:



d) $F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2}$

e) $f(0,5) = 0,9$ Nach 30 Minuten befinden sich etwa 0,9 Milligramm pro Liter im Blut.

Die maximale Wirkstoffkonzentration beträgt $1 \frac{mg}{l}$.

f) Überprüfung, ob die zweite Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat.

2 Stunden nach der Einnahme ist die Abnahme der Wirkstoffkonzentration am größten.

g) $A(b) = F(b) - F(0) = 4ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - (4 \cdot ln(1) + \frac{4}{1}) = 4ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4$

$$A(b) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{4 \cdot ln(x+1)}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{\to 0} + 4 = \infty$$

Die Funktion stellt für große Zeitwerte keine realistische Modellierung dar.

h) $f(x) = 0,75 \qquad x > 1$

$\frac{3}{4} = \frac{4x}{(x+1)^2}$

$3(x+1)^2 = 16x$

$3x^2 + 6x + 3 = 16x$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$

x_1 ist zu klein, daher $x_2 = \frac{18}{6} = 3$

Die 2. Tablette sollte also spätestens drei Stunden nach der Ersteinnahme erfolgen.

i) Es handelt sich um die Summe von zwei Wirkstoffkonzentrationen, wobei die zweite Wirkstoffkonzentration in positiver Zeitrichtung um 2,5 verschoben ist:

$w(x) = f(x) + f(x - 2,5)$ das entspricht Term B.

j) $k'(x) = \frac{6 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x}+1) - 3e^{2x} \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{6e^{2x} \cdot 1}{(e^{2x}+1)^2}$

Der Zähler und der Nenner sind für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ positiv, also auch der gesamte Term. Da die Ableitungsfunktion stets positive Funktionswerte aufweist muss $k(x)$ streng monton steigen.

k) $k(1) = \frac{3 \cdot e^2}{e^2+1} - 1,5 \approx 1,14$ Also ist vor 60 Minuten nach Beginn der Infusion der benötigte Wert erreicht. Da es sich um eine streng monoton steigende Funktion handelt, ist damit eine Bedingung erfüllt.

$\lim_{x \to +\infty} k(x) = 3 - 1,5 = 1,5 < 2$

Die Konzentration steigt zwar an, bleibt jedoch immer unter $1,5 \frac{mg}{l}$. Sie erreicht also niemals die gesundheitsschädliche Grenze. Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt.