Abi 89 LK Angabe

0.1 L1 Integralrechnung

I. Gegeben ist die Funktionenschar $f_c : x \mapsto \frac{x^2+c-4}{x+2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, c \in \mathbb{R}^+$

1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.
   Führen Sie, falls nötig, Fallunterscheidungen durch.

   b) Bestimmen Sie die Extrema der Scharfunktionen f_c, und ermitteln Sie die Ortskurve der Tiefpunkte aller Scharkurven.
   $\left[\text{Teilergebnis:} f_c'(x) = 1 - \frac{c}{(x+2)^2}\right]$

   c) Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse im Bereich $-6 \leq x \leq 4$ die Asymptoten, den Graph der Funktion f_c und die Ortskurve der Tiefpunkte (Hochformat, Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte, Längeneinheit 1cm).

   d) Weisen Sie nach, dass jede Scharkurve punktsymmetrisch ist.

2. Betrachtet wird nun die Funktion $F : x \mapsto \int\limits_0^x f_1(t)dt, x > -2.$

   a) Geben Sie, ohne die Integration durchzuführen, die Abszissen der Hoch-, Tief- und Wendepunkte von F an.

   b) Untersuchen Sie, ebenfalls ohne Ausführung der Integration, das Monotonierverhalten von F in $\mathbb{R}^+$, und begründen Sie, warum F dort genau eine Mullstelle x_0 besitzt.

   In den Teilaufgaben 2c und 2d sind die Rechenergebnisse jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

   c) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$.
   Berechnen Sie $F(-\sqrt{3})$ und $F(\sqrt{3})$ und geben Sie den Inhalt A des von der x-Achse und dem Graphen von f_1 eingeschlossenen Flächenstücks an.
   $\left[\text{Teilergebnis:} F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + ln(x+2) - ln2\right]$

   d) Zur genaueren Bestimmung von x_0 (Teilaufgabe 2b) wird nun die Funktion $g : x \mapsto x - \sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$, eingeführt. Zeigen Sie, dass für $x \geq \sqrt{3}$ gilt:
   $g(x) \geq f_1(x)$.

   Bestimmen Sie die reelle Zahl $a > \sqrt{3}$ so, dass $\int\limits_0^{\sqrt{3}} f_1(t)dt + \int\limits_{\sqrt{3}}^{a} g(t)dt = 0$ gilt.

   Entscheiden Sie, ob $x_0 \leq a$ oder $x_0 \geq a$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie $F(2\sqrt{3})$ und geben Sie dann ohne weitere Rechnumg mit Hilfe der gefundenen Ergebnisse ein möglichst kleines Intervall an, in dem x_0 liegt.

   e) Untersuchen Sie das Verhalten von F am linken Rand des Definitionsbereichs, und skizzieren Sie den Graphen von F unter Verwendung der gewonnenen Ergenisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1c.

II. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{2 \cdot e}{a+e^{2x}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $D = \mathbb{R}$; die Graphen werden mit G_a bezeichnet.

(a) a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehung:
$f_a(ln\sqrt{a} + d) = f_a(ln\sqrt{a} - d)$ mit $d \in \mathbb{R}$.
Welche geometrische Bedeutung hat diese Beziehung für die Graphen G_a?

b) Untersuchen Sie das Verhalten fon $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$.
Geben Sie die Monotoniebereiche sowie Lage und Art des Extrempunktes an. Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte aller Graphen G_a.

c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f_1(1), f_1(2)$, und $f_{0,25}(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung der bisheriegen Ergebnisse die Graphen $G_1, G_{0,25}$ sowie die Ortskurve der Extrempunkte (Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 2cm).

(b) Gegeben ist die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f_1(t)dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$; der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.
Die Teilaufgaben 2a, 2b und 2c sind ohne Berechnung des Integrals zu bearbeiten.

a) Weisen Sie nach, dass F streng monoton steigt und dass der Graph G_F zum Ursprung symmetrisch ist.

b) Zeigen Sie, dass G_F genau einen Wendepunkt W hat, und geben Sie sein Koordinaten an. Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.

c) Für $b > 0$ gilt: $F(b) > b \cdot f_1(b)$.
Begründen Sie diese Aussage anschaulich mit Hilfe einer Flächenbetrachtung. Zeigen Sie, dass sich die Graphen G_f und G_1 im Bereich $0 < x < 1$ genau einmal schneiden.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitionsmethode eine integralfreie Darstellung von $F(x)$.
$\left[\text{Zur Kontrolle:} F(x) = 2 \cdot \text{arctan} e^x - \frac{\pi}{2}\right]$

e) Berechnen Sie den Inhalt der sich beidseitig in Unendliche ersteckenden Fläche zwischen $G1$ und der x-Achse.

f) Bestimmen Sie x_0 so, dass $F(x_0) = 1$ ist.

g) Skizzieren Sie nun unter Verwendung der erahaltenen Ergebnisse den Graphen G_F in das bereits angelegte Koordinatensystem.

0.2 L2 Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

III. Beim Biathlon-Training wird zuerst gelaufen, dann nach bestimmten Regeln geschossen, und zwar in Serien von je 5 Schüssen (5-Serie).

1. Für jeden Sportler sei zunächst die Wahrscheinlichkeit p, bei einem Schuss einen Treffer zu erzielen, konstant. Die einzelnen Schüsse erfolgen unabhängig voneinander.
   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilnehmer mit der Terfferwahrscheinlichkeit p=0,6 in einer 5-Serie mehr als drei Treffer erzielt. Wie viele 5-Serien muss dieser Teilnehmer mindestens abgeben, um mit mindestens 90% Sicherheit bei wenigstens einer 5-Serie mehr als drei Treffer zu erzielen?
   b) Nach wie vielen Schüssen könnte ein Beobachter die Trefferwahrscheinlichkeit eines Sportlers auf 0,01 genau mit einer Sicherheit von mindestens 80% abschätzen? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow.
2. Ein Trainer möchte wissen, obe es sich lohnt, für den ersten Schuss der 5-Serie besonders viel Zeit zu verwenden, da er glaubt, dass nach einem Fehlschuss das Selbstvertrauen und damit die Trefferwahrscheinlichkeit p sinkt.
   a) Berechnen Sie zunächst für die konstante Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,9 die Wahrscheinlichkeit p_2, dass bei den Schüssen 2 bis 5 mindestens ein Fehlschuss erfolgt. [Ergebnis: $p_1 = 0,3439$]
   b) In den Traingsprotokollen werden 300 5-Serien von Schützen mit p=0,9 gesucht, bei denen der erste Schuss ein Fehlschuss war. Unter diesen 300 wird die Anzahl Z der Serien mit noch mindestens einem weiteren Fehlschuss gezählt.
      Für welche Werte von Z kann man bei einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothenuse H_0 :="Die Trefferwahrscheinlichkeit nimmt nicht ab, wenn der erste Schuss ein Fehlschuss war" abgelehnt werden? Verwenden Sie die Normalverteilung.
3. Beim Schiessen soll nun der Sportler 5 Treffer erzielen, darf aber höchstens 7 Schüsse abgeben. Für die ersten 5 Schüsse braucht er insgesamt 100 Sekunden, für jeden weiteren Schuss 40 Sekunden wegen des Nachladens.
   Erreicht er keine 5 Treffer, so wird die gesamte Schißzeit (einschließlich der Strafzeit) auf 300 Sekunden festgelegt.
   Die Zufallsgröße X gebe die gesamte Schießzeit in Sekunden an.
   a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert E(X) dieser Zufallsgröße in Abhängigkeit von p. Berechnen Sie E(X) für $p = 1; 0,9; 0,8$ Sekunden. [Teilergebnis: $E(X) = 300 - 200p^5(14 - 22p + 9p^2)$]
   b) Vor dem Schießen muss jeder Sportler laufen. Erfahrungsgemäß sinkt bei allen die Trefferwahrscheinlichkeit p gleichmäßig um 0,01 pro Sekundem

Laufzeitgewinn.
Ein Sportler möchte seine Laufzeit um 30 Sekunden verbessern. Kann er erwarten, dass er so seine Gesamtueit für Laufen und Schießen verringert, wenn ersonst die Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

IV. <Fehlt Zeichnung> Bei zwei Glücksrädern mit jeweils gleich großen Sektoren wird nach dem Stillstand des Rades durch denPfeil angezeigt, ob man einen Treffer (1) oder eine Niete(0) hat (siehe Abbildung).

1. Mit dem Glücksrad I wir 10mal gespielt.
    a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr Treffer als Nieten?
    b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim 10. Spiel den 4. Treffer?
2. a) Wie oft müsste man mit dem Glücksrad I mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkiet dafür, dass die relative Häufigkeit für einen Treffer im Intervall $[0,38;0,42]$ liegt, mindestens 97% ist?
    Verwenden Sie die Tschebyschow-Ungleichung.
    b) Es wird nun mit zwei (voneinander unabhängigen) Glücksrädern vom Typ I gleichzeitig gespielt. Wie oft müßte man das mindestens tun, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens ein Doppeltreffer auftritt?
3. Das Glücksrad I wird nun so lange betätigt, bis man einen Treffer erhält, höchstens jedoch viermal. Die Anzahl der Spiele wird durch die Zufallsgröße X angegeben. Berechnen Sie Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert und Varianz dieser Zufallsgröße.
4. Am Glücksrad I und am Glücksrad II werde je viermal unabhängig voneinander gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Glücksrad I mehr Treffer erzielt werden als am Glücksrad II?
5. Die Ergebnisse von jeweils 500 Spielen mit dem Glücksrad I bzw. mit dem Glücksrad II wurden in Protokollen festgehalten. Dabei wurde die ANgabe des Glücksrades vergessen; deshalb werden alle Protokolle mit höchstens k Treffern dem Glücksrad I, die anderen dem Glücksrad II zugeordnet.
    a) Bestimmen Sie k so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Protokoll fälschlicherweise dem Glücksrad I zuzuschreiben, unter 1% liegt, und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Protokoll fälschlich dem Glücksrad II zuzuweisen möglichst klein wird. Verwenden Sie die Normalverteilung.
    b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei Verwendeung der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a ein Protkoll irrtümlich dem Glücksrad II zugeordnet? Verwenden Sie die Normalverteilung.

0.3 L3 Analytische Geometrie

V. In einem kartesischen Koordinatensystem K sind die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$ sowie der Punkt A(4|9,5|8) und die Gerade

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9,5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda in \mathbb{R},$$

gegeben.

1. a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E und den Fußpunkt A_0 des Lots von A auf E. [Teilergebnis: $S(2|1,5|2)$]

   b) Die Gerade h sei die senkrechte Projektion von g auf E. Geben Sie ein Gelichung von h an.
   $$\left[\text{Mögliches Ergebnis:} h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

   c) Weisen Sie nach, dass die Gerade:
   $$k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R},$$
   in der Ebene E liegt, senkrecht auf h steht und den in Teilaufgabe 1a bestimmten Punkt S enthält.

   d) Legen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen zwischen E, g h und k hervorgehen. Die Zeichnung ist im folgenden entsprechend zu ergänzen.

2. In der Ebene E wird nun ein zwedimensionales kartesischen Koordinatensystem K' eingeführt mit dem Punkt S(2|1,5|2) als Ursprung und auf den Betrag 1 normierten Richtungsvektoren von h bzw. k als erstem bzw. zweiten Basisvektor.

   a) Geben Sie die Koordinaten q'_1, q'_2 des in E liegenden Punkte Q(2|0,5|5) in dem neuen System K' an. [Mögliches Ergebnis: $q'_1 = \sqrt{2}, q'_2 = \sqrt{3}$]

   b) Berechnen Sie unter Verwendung von Vektoren aus K' den Winkel ϕ, den die Geraden h und SQ bilden.

   c) Die Parallele zu h durch Q sei p. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Abstand der windschiefen Geraden p und g gleich $\sqrt{3}$ ist.

VI. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|-4|4)$, $B(2|4|-2)$ und $C_a(2a-3|5a|6a+3) a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Das Dreieck ABC_0 bestimmt eine Ebene E_0.
   Stellen Sie eine Gleichung von E_0 in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis:$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 12 = 0$]

   b) Bestätigen Sie, dass gilt: $\gamma_0 = \angle AC_0B \approx 77,8^o$.

   c) Wenn a alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft, bewegt sich C_a auf einer Geraden g. Stellen Sie eine Gleichung von g auf, und beweisen Sie, dass g auf E_0 senkrecht steht.

2. a) Zeigen Sie, dass alle Dreiecke ABC_a gleichschenklig sind.

   b) Der Mittelpunkt der Strecke [AB] sei S. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass C_0S das gemeinsame Lot von g und AB darstellt.

3. a) Welchen Abstand d_a hat C_a von E_0? Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von C_a bezüglich E_0.

   b) Entscheiden Sie ohne weitere Rechnung, ob es Werte von a gibt, für die das Dreieck ABC_a rechtwinklig ist , und solche, für die das Dreieck ABC_a gleichseitig ist. Wie viele sind es gegebenenfalls jeweils?