

Abi 09 Lsg Ana I

1. $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$

Über die Nullstellen lässt sich ein Großteil des Terms in der faktorisierten Form aufstellen:

$$f(x) = a(x-0)(x-2)(x-4)$$

a lässt sich über den Punkt P ermitteln:

$$f(1) = 3 = a \cdot (1-0)(1-2)(1-4) = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-4) = x \cdot (x^2 - 2x - 4x + 8) = x^3 - 6x^2 + 8 \checkmark$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ist WEP. } \checkmark$$

Gleichung der Wendetangente:

$$f(2) = 0; f'(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$$

$$T(x) = -4x + t$$

WEP(2|0) einsetzen:

$$0 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 8$$

$$T(x) = -4x + 8 \checkmark$$

b) $\gamma = 90$ (Winkel beim Ursprung)

$$\tan(\alpha) = 8/2 = 4 \Rightarrow \alpha \approx 75,96$$

$$\beta = 90 - \alpha \approx 14,036$$

c) $F(4) = \int_0^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{1}{4}4^4 - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right) - 0 = 4^3 - 2 \cdot 4^3 + 14 \cdot 4^2 = 0$

Die beiden Flächenstücke besitzen also den gleichen Flächeninhalt. Aufgrund

ihrer gerichteten Flächeninhalte ist die Flächenbilanz über beide zusammen Null.

Inhalt eines Flächenstückes:

$$F(2) = \int_0^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 - 2^4 + 4 \cdot 2^2 \right) - 0 = 2^2 - 2^4 + 2^4 = 4$$

Die Summe der Inhalte beträgt also 8.

- d) Da sich bei Integration nach links über negative Funktionswerte positive Flächenbilanzen ergeben (also für x-Werte kleiner 0, sind die y-Werte größer 0), fällt Graph I aus.

Graph II weist im Intervall]0;4[drei Stellen mit waagerechter Tangente auf, dann müsste seine Ableitung $f(x)$ in diesem Intervall drei Nullstellen haben, das ist aber nicht der Fall.

Deshalb kann nur Graph III der passende Graph sein.

- e) Jede Integralfunktion besitzt seine eigene untere Integrationsgrenze als Nullstelle. Die gesuchte Stammfunktion darf also keine Nullstelle haben. Beispielsweise:

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1$ (hier ist der Graph II um eins nach oben verschoben, es gibt also keine Nullstellen mehr).

2. a) $0,5m_0 = m_0 e^{k \cdot 13,2}$

$$0,5 = e^{k \cdot 13,2} \quad | \ln()$$

$$\ln(0,5) = k \cdot 13,2 \quad | : 13,2$$

$$k = \frac{\ln(0,5)}{13,2} \approx -0,05251$$

b) $m(t) = m_0 e^{-0,05251 \cdot t}$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-0,05251 \cdot t} \approx 0,8105 = 81,1\%$$

$$0,1 = e^{-0,05251 t}$$

$$\ln(0,1) = -0,05251 t$$

$$t = \frac{\ln(0,1)}{-0,05251} \approx 43,8$$

Es dauert etwa 43,8 Stunden.