Abi 16 Lsg Geo I

A 1 a)

b) Nachdem D die x_3-Koordinate -2 besitzt, müssen die x_1-Achse durch EH und die x_2-Achse durch HG gehen. Es gilt dann $A(2|0|-2)$

c) P(2|2|z) mit $\left|\vec{HP}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{2^2+2^2+z^2} = 3$

$4+4+z^2 = 9 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

Aus der Situation ergibt sich $z = -1$ Also P(2|2|-1).

2 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = 2 \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{C} = \vec{A} - 2 \cdot \left(\vec{B} - \vec{A}\right)$

$\vec{C} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = \begin{pmatrix} -6+8 \\ 3-0 \\ 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4+2 \\ 1-0 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-4+2)^2 + (1-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$

Also liegt B auf der Geraden und ist von A genau 3 Einheiten entfernt. Gesucht ist eine Gerade mit Aufpunkt B und einem Richtungsvektor senkrecht zu $\vec{AB}$. Suche als Richtungsvektor einen, dessen Skalarprodukt mit $\vec{AB}$ Null ergibt:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und als Gerade: $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B a) $\vec{n'} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 + x_2 + x_3 + c = 0$ Aufpunkt einsetzen: $6+3+3+c = 0 \Rightarrow c = -12$ ergibt die Ebene.

$x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0\checkmark$.

b) A, B und Z haben die gleiche x_3-Koordinate, also liegen alle drei Punkte in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Ein Normalenvektor wäre also $n_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{C'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{CC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, linear abhängig. Also steht die Strecke [CC'] senkrecht auf der Ebene F.

c) Einige Punkte und Verbindungsvektoren:

$\vec{A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{AC'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es reicht zu zeigen, dass ΔABZ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, denn bei Punktspiegelung ergibt sich daraus ein Quadrat.

$\vec{ZA} \circ \vec{ZB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ 030 = 0$ (rechtwinklig)

$\left|\vec{ZA}\right| = 3 = \left|\vec{ZB}\right|$

$\checkmark \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{2} \cdot 3 \checkmark$

d) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9 \cdot 2 = 18$

Also gilt $V_{Oktaeder} = 2 \cdot 18 = 36$

e) Bestimme den Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

$\alpha \approx 54,7^o$ Damit wurde der Winkel zwischen der waagerechten und der Seitenfläche bestimmt. Der Winkel zwischen der oberen und unteren Seitenfläche ist dann doppelt so groß: $\beta = 2\alpha = 109,4^o$

f) Kugelmittelpunkt: Z; Kugelradius $\bar{ZC} = 3$.

Kugelgleichung: $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36\pi$

Anteil des Oktaedervolumens: $\frac{V_o}{V_k} = \frac{36}{36 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi}$