Abi 15 Lsg Ana I

A 1 a) $D = \mathbb{R}^+$

b) Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist:

$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$2 + ln(x) = 0$

$ln(x) = -2$

$x_2 = e^{-2}$

2 a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ was nicht dem Graphen entspricht. Also muss es sich um den Graphen von $g(x)$ handeln.

b) $\int_0^1 h'(x)dx = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$

3 a) z.B.$a = 6$

b) Der Graph von $x^2 - 4$ ist nach oben geöffnet und im Bereich $]-2;+2[$ negativ. Also ist dieser Term geeignet um die gewünschte Definitionsmenge zu erzeugen:

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ also $b = 4$.

c) Der Wertebereich von $-e^x$ ist $W =]-\infty;0[$. Also gilt für $4 + (-e^x) : W =]-\infty;4[$, da der Graph um 4 in positiver Richtung verschoben wird.

4 Das Newtonverfahren nutzt die Nullstellen der Tangenten am Graphen, um sich der Nullstelle anzunähern. In H und T besitzt der Graph waagerechte Tangenten, die keine Nullstellen besitzen, also wird sich aus dem Startwert keine Folgewert berechnen lassen.

5 a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ einzige Nullstelle, also WEP

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$

Der Graph von f geht also durch den Wendepunkt WEP(2|0).

Die Gerade $g(x) = x - 2$ geht ebenfalls durch diesen Punkt:

$g(2) = 2 - 2 = 0$ also ist $(2|0)$ auch ein Punkt der Geraden.✓

b) Der Graph wird also um 1 in positiver x-Richtung und 2 in positiver y-Richtung verschoben:

$h(x) = f(x-1) + 2 = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 6 + 2$

B 1 $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{(x+1)(x+3)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$✓

$(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$✓ $\frac{1}{0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5} = \frac{2}{(x+2)^2-1} = \frac{2}{x^2+4x+4-1} = \frac{2}{x^2+4x+3}$✓

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\underbrace{x^2 + 4x + 3}_{\to\infty}} = 0$

Zwei Nullstellen im Nenner, die sich nicht kürzen lassen: $x = -1; x = -3$

$f(0) = \frac{2}{1\cdot 3} = \frac{2}{3}$

c) $f'(x) = 0$, genau dann wenn $p'(x) = 0$

$p(x)$ ist eine Parabel, deren einzige Stelle mit waagerechter Tangente der Scheitelpunkt ist. Da $p(x)$ bereits in Scheitelpunktform vorliegt, lässt sich $x = -2$ als x-Koordinate des Scheitelpunktes ablesen.

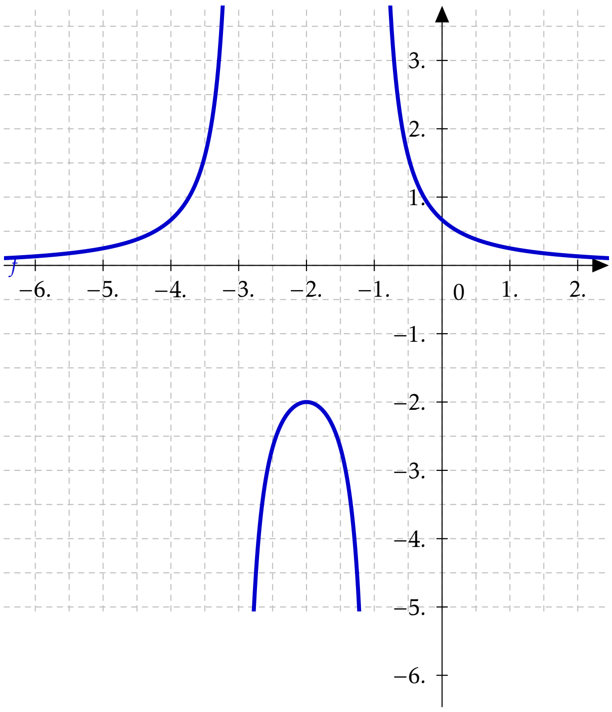
Weiterhing gilt, dass die Parabel nach oben geöffnet ist, weshalb $p'(x < -2) < 0$ und $p'(x > -2) > 0$.

Da $f'(x)$ aufgrund der angegebenen Formel jeweils das umgekehrte Vorzeichen besitzt, ist $f(x)$ im Intervall $]-3;-2[$ streng monoton steigend und im Intervall $]-2;-1[$ streng monoton fallend.

Der Extrempunkt von G_f liegt also bei $x = -2$. $f(-2) = -2$ also gilt HOP$(-2|-2)$.

d) $f(-5) = 0,25$

$f(-1,5) \approx -2,67$



2 $h : x \mapsto \frac{3}{e^{x+1}-1}$; $D_h =]-1;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\underbrace{e^{x+1}-1}_{\to\infty}} = 0$

Nenner übersteigt jeden Wert, Zähler bleibt gleich, also geht der Term gegen 0.

$h(x) = 3 \cdot (e^{x+1} - 1)^{-1}$

$h'(x) = -3 \cdot (e^{x+1} - 1)^{-2} \cdot e^{x+1} = -\frac{3 \cdot e^{x+1}}{(e^{x+1}-1)^2} < 0$

Da Zähler und Nenner im Definitionsbereich größer Null sind und diese Zahl mit (-1) multipliziert wird.

b) Im Definitionsbereich gilt: $x + 1 > 0$, also gilt $e^{x+1} > e^0 > 1$, also gilt $e^{x+1} - 1 > 0$. Der Nenner ist also im Definitionsbereich stets positiv.

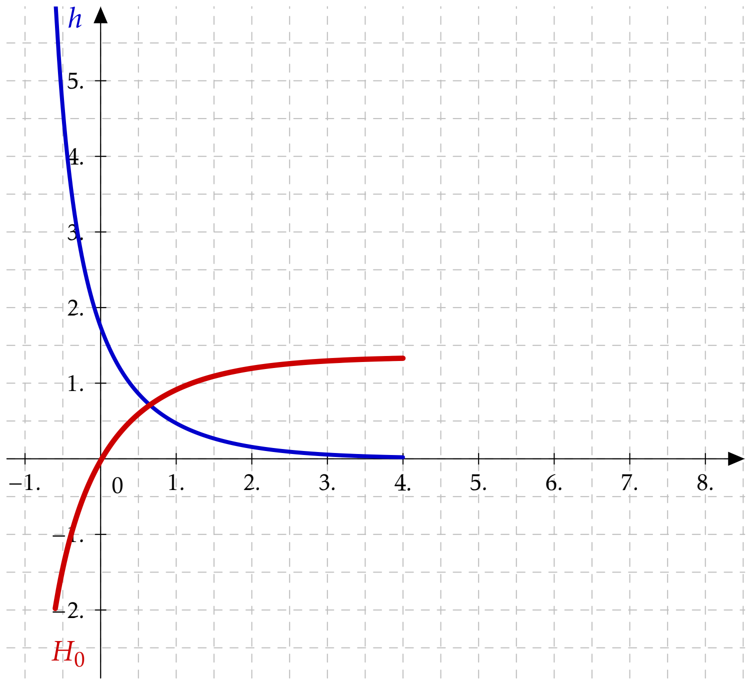
3 ist ebenfalls positiv. Also ist $h(x)$ im gesamten Definitionsbereich positiv.

Da aber gilt: $H_0'(x) = h(x)$ ist der Graph von H_0 streng monoton steigend (α).

Aus Teilaufgabe a ist bekannt $H_0''(x) = h'(x) < 0 \Rightarrow$Rechtskrümmung im gesamten Definitionsbereich. (β)

c) Jede Integralfunktion hat ihre untere Grenze als Nullstelle: $x_1 = 0$

$H_0(-0,5) \approx -1,4; \qquad H_0(3) \approx 1,3;$



3 a) $0,01 = \frac{3}{e^{x+1}-1}$

$100 = \frac{e^{x+1}-1}{3}$

$300 = e^{x+1} - 1$

$301 = e^{x+1}$

$ln(301) = x + 1$

$x = ln(301) - 1 \approx 4,71$

Nach 4,71 Minuten ist die Abbaurate auf 0,01 Gramm zurückgegangen.

b) Der Graph wird mit Faktor drei in y-Richtung gestreckt und um 0,2 in negativer y-Richtung verschoben.

c) $\int_0^1 h(x)dx \approx \int_0^1 k(x)dx = \int_0^1 3(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}) - 0,2dx$

$= [3 \cdot (ln(x+1) - ln(x+3) - 0,2x]_0^1 = 3 \cdot (ln(2) - ln(4)) - 0,2 - [3 \cdot (ln(1) - ln(3)) - 0]$

$= -3 \cdot ln(2) - 0,2 + 3ln(3) \approx 1,02$

Dies entspricht der in der ersten Minute abgebauten Menge an Schadstoffen in Gramm.