Abi 90 Ana II

Gegeben ist die Funktion

$f : x \mapsto x \cdot e^{1-x}$

mit $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Zeigen Sie, dass $O(0|0)$ der einzige Achsenschnittpunkt von G_f ist. Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.
   (Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ kann ohne Beweis verwendet werden.) (5BE)

   b) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f gilt: $f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$. Geben Sie das Monotonieverahlten von f sowie Art und Lage des Extrempunktes von G_f an. (5 BE)

   c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f; ermitteln Sie die Lage des Wendepunktes und eine Gleichung der Wendetangente von G_f. Zeigen Sie, dass die Wendetangente durch den Punkt (4|0) geht. (10BE)

   d) Berechnen Sie die Funktionswerte (auf Zehntel gerundet) an den Stellen $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und 4.
   Zeichnen Sie nun die Wendetangente und G_f im Bereich [-1;4] unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Hochformat, Ursprung im oberen Drittel, Längeneinheit 2cm). (7BE)

2. Für eine Funktion F besteht die Beziehung $F(x) = -e^{1-x} - f(x); D_F = \mathbb{R}$.

   a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass F Stammfunktion von f ist. (4BE)

   b) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{R}$ eine integralfreie Darstellung von

   $$J(k) = \int_{-1}^{k} f(x)dx.$$

   Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} J(k) = 0$ ist.
   Was bedeutet dies für die zwei zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $[-1;\infty]$ gelegenen Flächenstücke? (9BE)