Abi 84 Lsg Ana I

1. $f : x \mapsto \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x-3}{x^2}$

   a) Nullstelle:

   $\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = 0 \qquad | \cdot x^2$

   $6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

   Nullstelle $N(\frac{1}{2}|0)$.

   Senkrechte Asymptoten:

   $\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x-3}{x^2}$

   Nullstelle des Nenners: $x = 0$ ist senkrechte Asymptote.

   $$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{6}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0} = 0$$

   Waagerechte Asymptote: $y = 0$

   b) Zur Bestimmung der ersten Ableitung bietet sich die Potenzschreibweise an:

   $f(x) = 6 \cdot x^{-1} - 3 \cdot x^{-2}$

   $f'(x) = -6 \cdot x^{-2} - 3 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 6x^{-3} - 6x^{-2} = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^2} = \frac{6-6x}{x^3}$

   Suche alle Nullstellen der Ableitung:

   $\frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^2} = 0 \qquad |\dot{x}^3$

   $6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$

VZT	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
G_f	$\searrow$	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

   Lage des Extrempunktes: $f(1) = 3$ also HOP(1|3)

   c) Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kann man wieder mit der Potenzschreibweise arbeiten:

$f'(x) = 6x^{-3} - 6x^{-2}$

$f''(x) = 6 \cdot (-3) \cdot x^{-4} - 6 \cdot (-2)\dot{x}^{-3} = 12x^{-3} - 18x^{-4} = \frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4}$

Zur Bestimmung des Wendepunktes muss $f''(x) = 0$ gesetzt werden:

$\frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4} = 0 \qquad | \cdot x^4$

$12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Da es sich um nur eine Nullstelle handelt, muss diese auch der Wendestelle entsprechen. Koordinaten des Wendepunktes:

$f(\frac{3}{2}) = \frac{6}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\frac{9}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Koordinaten: WEP$(\frac{3}{2}|\frac{8}{3})$.

Die Wendetangente ist eine Gerade. Geraden sind eindeutig durch Steigung und y-Achsenabschnitt festgelegt. ($w(x) = m_w x + t_w$) Da es sich um eine Tangente handelt, müssen Graph und Gerade im Berührpunkt WEP$(\frac{3}{2}|\frac{8}{3})$ die gleiche Steigung besitzen. Also gilt:

$m_w = f'(\frac{3}{2}) = \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 6 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 6 \cdot \left(\frac{8}{27} - \frac{12}{27}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{27}\right) = -\frac{8}{9}$

Die Geradengleichung schaut also jetzt so aus:

$w(x) = -\frac{8}{9} \cdot x + t_w$

Zur Bestimmung von t_w muss nun ein Geradenpunkt eingesetzt werden. Dazu werden die Koordinaten des Wendepunktes verwendet, in dem die Tangente den Graphen berührt:

$w(\frac{3}{2}) = \frac{8}{3}$ oder

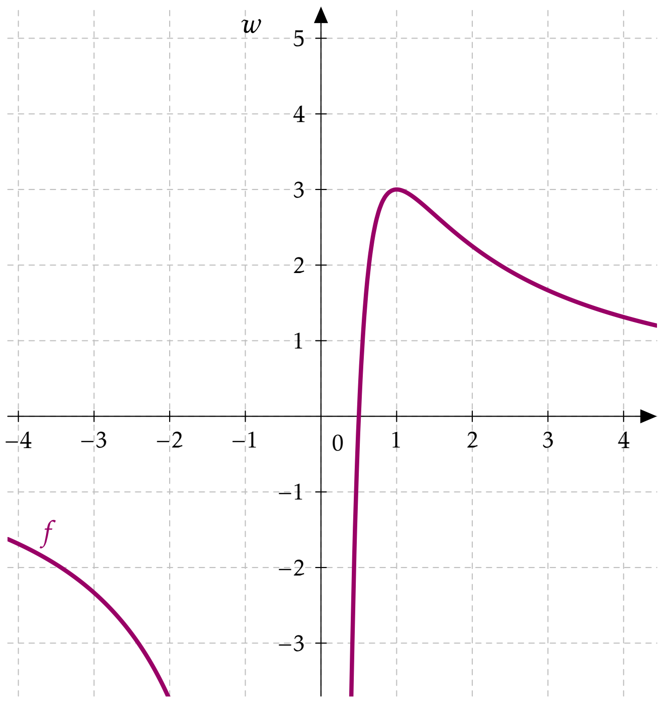
$-\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} + t_w = \frac{8}{3}$

$-\frac{4}{3} + t_w = \frac{8}{3} \Rightarrow t_w = \frac{12}{3} = 4$

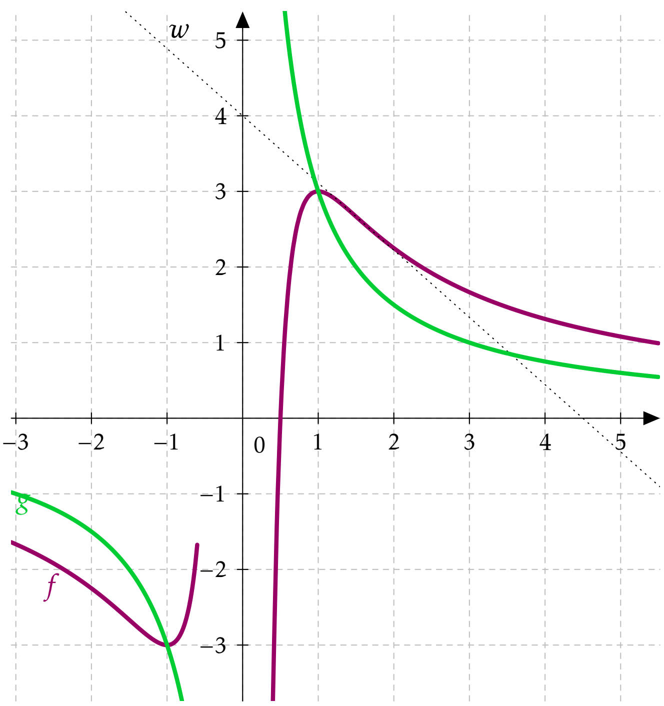
Gleichung der Wendetangente:

$w(x) = -\frac{8}{9}x + 4$

d) Graphen



2. a) Graphen



b) Bestimmung des Schnittpunktes beider Funktionen:

$f(x) - g(x) = 0$

$\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{3(x-1)}{x^2} = 0$

Der Schnittpunkt liegt bei $S(1|f(1))$.

Um den Flächeninhalt zwischen den Graphen zu ermitteln integriert man über die Differenzfunktion:

$\int_1^b f(x) - g(x)dx = 3\int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}dx = \left[ln(x) + \frac{1}{x}\right]_1^b = ln(b) + \frac{1}{b} - ln(1) - 1 = ln(b) + \frac{1}{b} - 1$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{ln(b)}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{b}}_{\to 0} - 1\right) \to \infty$$

3. Der gesuchte Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden und muss deshalb der Nullstelle von f(x) entsprechen:

   $N(\frac{1}{2}|0)$ wird zu $N'(0|\frac{1}{2})$ Da die gesuchte Tangente $z(x)$ zugleich in diesem Punkt die y-Achse schneidet ist ihr y-Achsenabschnitt $t_z = \frac{1}{2}$. Zur Bestimmung der Steigung von $z(x)$ berechnet man die Steigung der Tangente in der Nullstelle von $f(x)$ und bildet deren Kehrwert, was einer Spiegelung des Steigungsdreiecks an der Winkelhalbierenden entspricht (Vertauschung von Δx und Δy).

   $f'(\frac{1}{2}) = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 4 \cdot 6 = 24$

   Daher muss die Steigung der gesuchten Tangente $m_z = \frac{1}{24}$ betragen. Die gesuchte Gleichung lautet also:

   $z(x) = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$