

Abi 11 Lsg Geo II

1. a) Minimaleigenschaften für ein Rechteck:

- 1 Paar gegenüberliegender Seiten ist gleichlang und parallel
- es gibt einen 90° -Winkel

Vektorvergleich:

$$A'\vec{D}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad A'D' = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12;$$

$$B'\vec{C}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = A'\vec{D}' \checkmark;$$

Rechter Winkel:

$$A'\vec{D}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad A'\vec{B}' = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad A'\vec{D}' \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -16 + 32 - 16 = 0 \checkmark$$

Inhalt:

$$A'B' = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6; \quad A = 12 \cdot 6 = 72$$

b) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$\vec{BC} \circ \vec{AB} = 24 \cdot (-6) + (-24) \cdot (-12) + (-12) \cdot 12 = -144 + 288 - 144 = 0 \checkmark$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

c) Zur Findung des Normalenvektors bildet man das Vektorprodukt aus den zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} , die die Ebene ABCD aufspannen. Diese lassen sich als verkürzte Version der Vektoren \vec{AD} und \vec{AB} schreiben:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 - 2 \\ -(4 - 1) \\ -4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$$

Für c Aufpunkt A einsetzen: $2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \checkmark$$

Parallelität der Ebene A'B'C'D':

$$A'\vec{D}' \circ \vec{n} = 8 \cdot 2 + (-8) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = 16 - 8 - 8 = 0 \checkmark$$

$$A'\vec{B}' \circ \vec{n} = -2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -4 - 4 + 8 = 0 \checkmark$$

Abstand der Ebene A'B'C'D':

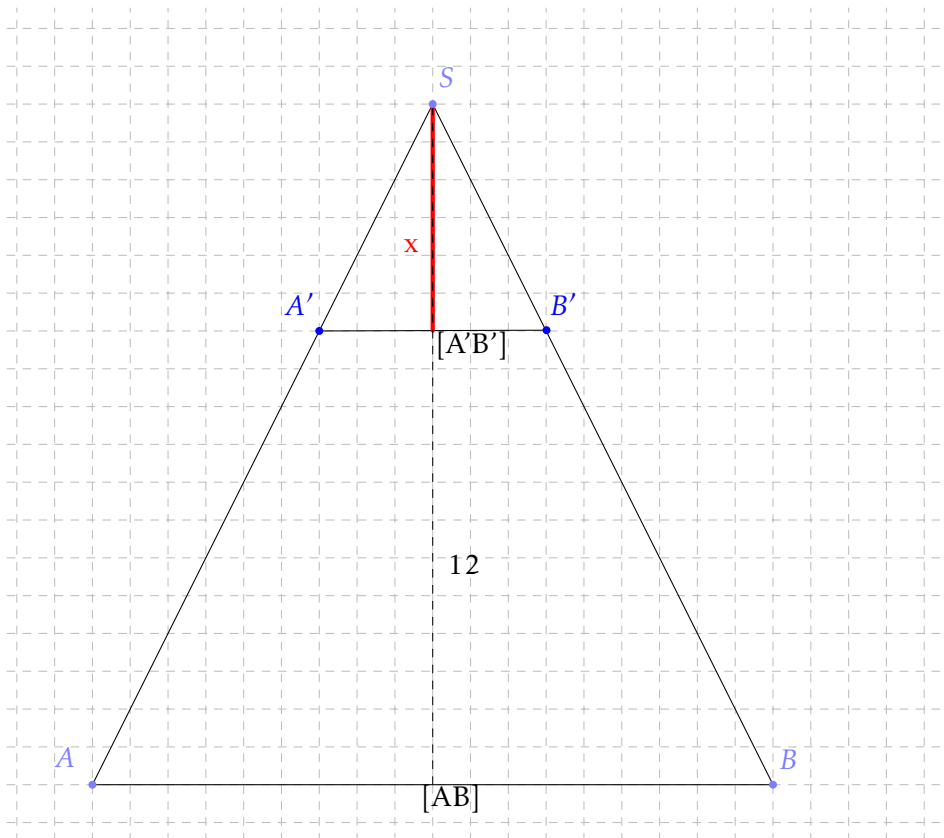
Setze z.B. A' in die HNF(E):

$$|\vec{n}| = \sqrt{9} = 3$$

$$HNF(E) : \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

$$d(A', E) = \left| \frac{2}{3} \cdot 14 + \frac{1}{3} \cdot (-8) + \frac{2}{3} \cdot 8 \right| = \frac{36}{3} = 12 \checkmark$$

d) Skizze:



$$\text{Basislänge } \bar{AB} = \sqrt{36 + 144 + 144} = \sqrt{324} = 18$$

$$\text{Breite bei Höhe 12: } \bar{A'B'} = 6$$

Es ergeben sich ähnliche Dreiecke, Streckenverhältnisse sind also gleich: $x :$

$$3 = (x + 12) : 9 \mid \cdot 9$$

$$3x = x + 12 \mid - x$$

$$2x + 12 \mid : 2$$

$$x = 6$$

$$\text{e) } V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gro}} - V_{\text{klein}} = \frac{1}{3}Gh - \frac{1}{3}G'h' = \frac{1}{3}(3^2 \cdot 72) \cdot (12 + 6) - \frac{1}{3}72 \cdot 6 = 3888 - 144 = 3744$$

f) Berechne den Abstand des Punktes B' von der Geraden BC:

$$g: \vec{X} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor lässt sich noch einkürzen und das ganze in Kurzform schreiben:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 + 2\lambda \\ -12 - 2\lambda \\ 12 - \lambda \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung des Abstands von B' muss der Differenzvektor $\vec{X} - \vec{B}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden stehen:

$$\begin{pmatrix} -6 + 2\lambda - 12 \\ -12 - 2\lambda + 12 \\ 12 - \lambda - 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -36 + 4\lambda + 4\lambda + 1\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 36 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Fußpunkt: } \vec{F} = \begin{pmatrix} -6 + 2 \cdot 4 \\ -12 - 2 \cdot 4 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand Fußpunkt-B': } \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5} \checkmark$$

Flächeninhalt der Trapezes:

$$A = \frac{1}{2}(\sqrt{24^2 + 24^2 + 12^2} + 12) \cdot 6\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{5} = 108\sqrt{5}$$

g) Der Mittelpunkt der Kante [BB'] berechnet sich zu:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \text{vec}B') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Da die Bohrung senkrecht nach unten stattfindet, bleiben die x_1 und die x_2 -Koordinate erhalten, die x_3 -Koordinate wird 0:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$