Abi 85 Lsg Geo II

1. (a) Setze PaFo(E_2) in KoFo(E_1):

$$2(0+2\lambda+2\mu)-(-5+4\lambda+4\mu)-2(-8+9\lambda+18\mu)-3=0$$

$$4\lambda+4\mu+5-4\lambda-4\mu+16-18\lambda-36\mu-3=0$$

$$-18\lambda-36\mu+18=0$$

$$-\lambda-2\mu+1=0 \Rightarrow \lambda=1-2\mu; \qquad \text{in} E_2:$$

$$s:\vec{X}=\begin{pmatrix} 2(1-2\mu)+2\mu \\ -5+4(1-2\mu)+4\mu \\ -8+9(1-2\mu)+18\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2\mu \\ -1-4\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s:\vec{X}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ebene 2 ist nur in PaFo gegeben, also gleich setzen und λ, μ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$1=2\lambda+2\mu$

$2=4\lambda+4\mu$

$0=9\lambda+18\mu$

Verwende I und III, II hat keinen zusätzlichen Gehalt.

III': $\lambda=-2\mu$ in I

I': $1=-4\mu+2\mu=-2\mu \Rightarrow \mu=-\frac{1}{2}$ in III'

III'': $\lambda=-2\cdot(-\frac{1}{2})=1$

Zur Überprüfung noch in II: $2=4\cdot 1+4\cdot(-\frac{1}{2})$✓

λ, μ sind eindeutig bestimmt. Daher muss P in E_2 liegen. ✓

Zur Hesse-Normalform von E_1.

Bestimme $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

$HNF(E_1): \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 1$

$d(E_1, P) = |\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot (-3) - \frac{2}{3} \cdot (-8) - 1| = |\frac{2}{3} + 1 + \frac{16}{3} - 1 = \frac{18}{3}| = 6\checkmark$

2. (a) Der Normalenvektor auf E_1 hat die Länge 3. P hat den Abstand 6 von der Ebene. Der Fußpunkt ergibt sich also, wenn man den doppelten Normalenvektor zu P addiert oder subtrahiert. Nachdem P im positiven Halbraum über E_1 liegt (hat man bei Berechnung des Abstandes gesehen), muss von P aus rückwärts gegangen werden um zu Ebene zu gelangen:

$$\vec{F} = \vec{P} - 2\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\checkmark$$

   (b) noch nicht implementiert

3. F liegt in der Ebene und s liegt auch in der Ebene. Bilde das Vektorprodukt aus dem Richtungsvektor u der Geraden s und dem Normalenvektor, dann erhältst du einen Vektor der auf diesen beiden senkrecht steht, also den Richtungsvektor v der Geraden h:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Nun werden die beiden Geraden h und s gleichgesetzt:

$-1 + 2\tau = 0 + \nu$

$-2 - \tau = -5 + 2\nu$

$-1,5 + 2,5\tau = 1$

Aus III folgt sofort: $\tau = 1$ in I einsetzen:

$-1 + 2 = \nu = 1$ mit II überprüfen:

$-2-1=-5+2\checkmark$

In s einsetzen: $\vec{S}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$