Abi 84 Lsg Geo II

1. a) Normalenvektor bestimmen:

   $$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Koordinatenform mit c:

   $-2x_1 - 2x_2 + x_3 + c = 0$

   Aufpunkt einsetzen:

   $-2 \cdot 6 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = +12$

   Koordinatenform:

   $-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 12 = 0$, was bis auf das Vorzeichen genau dem Ergebnis entspricht. ✓

   Ab hier wird das Zwischenergebnis weiterverwendet.

   b) Es gilt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$. Der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden sind also linear abhängig. Somit verläuft die Gerade in der gleichen Richtung wie der Normalenvektor.

   Schnittpunkt: Setze Gerade in die Koordinatenform der Ebene:

   $2 \cdot (2 + 2\sigma) + 2 \cdot (2\sigma) - (1 - \sigma) - 12 = 0$

   $4 + 4\sigma + 4\sigma - 1 + \sigma - 12 = 0$

   $-9 + 9\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = 1$

   $$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ✓$$

2. a) Gesucht ist die Schnittgerade zweier Ebenen, wobei die x_1x_2-Koordinatenebene F ausgedrückt werden kann durch:

$F : x_3 = 0$ (Koordinatenform der $x_1 x_2$-Koordinatenebene)

Setzt man nun die Parameterform von E in F ein so ergibt sich eine Gleichung:

$0 + 2\lambda + 0\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Dieses λ wird wiederum in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist noch zu zeigen, dass S auf der Geraden s liegt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mu = 2 \checkmark$

b) $cos(\phi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \phi = 90$$

c) $cos(\psi) = \left| \frac{\vec{u} \circ \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \right|$

$= \left| \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{3 \cdot 1} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \psi \approx 70,53$

3. a) Es gilt $\left|\vec{u}\right| = 3$, daher erhält man für ein σ drei Einheiten auf der Geraden. Nach Aufgabe 1b ist die Ebene daher drei Einheiten vom Aufpunkt entfernt. Um die Spiegelpunkte im Abstand ± 6 zu erhalten muss σ auf -1 und +3 gesetzt werden. Auf diese Weise erhält man zwei Punkte mit Abstand 4σ, also 12 Einheiten. Da außerdem $\sigma = 1$ den Mittelpunkt in diesem System darstellt, liegen die beiden Punkte symmetrisch zur Ebene.

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ +2 \end{pmatrix} ; \vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Wenn p parallel zu E verläuft, dann muss gelten, dass der Normalenvektor von E auch normal zu p ist. Also:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0 \checkmark$$

p verläuft parallel zu E. Dann muss der gleiche Vektor an Q angeheftet die Gerade q ergeben, die dann ebenfalls parallel zu E und durch den Spiegelpunkt Q verläuft. Also:

$$q : \vec{X} = \vec{Q} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$