Abi 10 Lsg Geo I

1. $\vec{u}$ ist der Richtungsvektor von h, H(7|4|6) ihr Aufpunkt.

   a) Echt parallel heißt parallel aber nicht identisch. Zu zeigen also:
      - Richtungsvektoren linear abhängig
      - A liegt nicht auf h

      $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u}$, also linear abhängig!

      Untersuche ob A auf h:

      $$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2\lambda \\ 4+3\lambda \\ 6+2\lambda \end{pmatrix}$$

      In der ersten Komponente gilt $\lambda = 5$, in der zweiten $\lambda = -\frac{2}{3}$, WIDERSPRUCH!

      Erstelle eine PaFo der Ebene:

      $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\left(\vec{H} - \vec{A}\right)$

      Suche den Normalenvektor:

      $$\vec{n}' = \vec{u} \times \left(\vec{H} - \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

      $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

      damit steht schon einmal dieser Teil der KoFo fest:

      $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + c = 0$

      und c wird aus dem Einsetzen von A bestimmt:

      $-3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -3 \checkmark$

   b) Bilde aus S und dem Normalenvektor von E eine Gerade. Ihr Schnittpunkt befindet sich in F:

      $$i: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\sigma \\ 7+2\sigma \\ -11-2\sigma \end{pmatrix}$$

In KoFo der Ebene E:

$3 + \sigma + 2(7 + 2\sigma) - 2(-11 - 2\sigma) - 3 = 0$

$3 + \sigma + 14 + 4\sigma + 22 + 4\sigma - 3 = 0$

$36 + 9\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -4$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 7-8 \\ -11+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{B}\checkmark$

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Um von S nach B zu kommen, muss man diesen Vektor auf das vierfache verlängern ($\lambda = -4$), also gilt:

Der Abstand von S nach B ist $d = 4 \cdot 3 = 12$.

c) Bilde zuerst die Differenzvektoren:

$\vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}; \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix};\text{(s.o.)} \qquad \vec{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Winkel bei B:

$cos(\beta) = 0; \Rightarrow \beta = 90$ da B der Fußpunkt des Lotes von S auf die Ebene ist, in der A und B enthalten sind.

Winkel bei A:

$cos(\alpha) = \frac{\vec{AS} \circ \vec{AB}}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}}$

$\Rightarrow \alpha = 71,04$

$\Rightarrow \gamma = 18,96$ (Winkelsumme)

d) Suche einen Punkt X der Geraden h, bei dem der Verbindungsvektor $\vec{AX}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von h steht:

$\left(\vec{X} - \vec{A}\right) \circ \vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 7-2\lambda-(-3) \\ 4+3\lambda-2 \\ 6+2\lambda-(-1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$(10-2\lambda)\cdot(-2)+(2+3\lambda)\cdot 3+(7+2\lambda)\cdot 2 = 0$

$-20+4\lambda+6+9\lambda+14+4\lambda = 0$

$0+17\lambda = 0; \Rightarrow \lambda = 0$

Fußpunkt des Lotes von A auf h ist also der Aufpunkt H selbst. Bestimme nun den Abstand:

$|\vec{AH}| = \sqrt{10^2+2^2+7^2} = \sqrt{9\cdot 17} = 3\sqrt{17} = \approx 12,37$

2. a) Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}G\cdot h$

   Die Grundfläche ist ein Kreis mit dem Radius $\bar{AB}$, daher gilt:

   $G = \pi r^2 = \pi\bar{AB}^2 = \pi\cdot 17 \approx 53,41$

   $h = |\vec{BS}| = \sqrt{16+64+64} = 12$

   $\Rightarrow V \approx \frac{1}{3}\cdot 53,41\cdot 12 = 213,63$

   b) Die Gerade BS ist das Rotationszentrum des Kegels. Die vom Zentrum am weitesten entfernten Punkte liegen auf dem Kreisrand der Grundfläche und haben den Abstand $\bar{AB} = \sqrt{17}$. Da sich die Gerade h in der gleichen Ebene wie die Grundfläche befindet (siehe Aufgabe 1b) reicht es deren Abstand von g zu wissen. Dieser Abstand beträgt aber $3\sqrt{17}$, wie unter 1d berechnet. Somit kann die Gerade den Kegel nicht einmal berühren.

   c) Betrachte den kleinen Kegel K_2 anstelle des Kegelstumpfes. Es gilt $h_2 = \frac{2}{3}h_1$. Nach dem Strahlensatz gilt dann auch $r_2 = \frac{2}{3}r_1$. Somit ergibt sich für das Volumen von K_2:

   $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2\cdot h_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}r_1\right)^2\cdot\frac{2}{3}h_1$

   $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot h_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}V_1$

   $\frac{8}{27} \approx 0,296 = 29,6\%$

   Der kleine Kegel hat also 29,6 % Volumen des großen. Damit hat der Kegelstumpf 70,4% des großen Kegels.

d) Bestimme den Lotfußpunkt P' von P auf die Gerade BS. Wenn gilt:

$\frac{P'\bar{P}}{P'\bar{S}} = \frac{\bar{AB}}{\bar{BS}}$ dann ist (bis auf Rotationssymmetrie) der Stahlensatz erfüllt und P liegt auf der Mantelfläche.