

## Abi 13 Lsg Ana II

### Teil 1

$$1 \quad f(x) = \ln(\underbrace{2013 - x}_{\rightarrow \infty})$$

Maximaler Definitionsbereich

$$2013 - x > 0 \Rightarrow x < 2013 \Rightarrow D_f = ]-\infty; 2013[$$

Verhalten an den Grenzen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\underbrace{2013 - x}_{\rightarrow \infty}) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2013} \ln(\underbrace{2013 - x}_{\rightarrow 0}) = -\infty$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$$f(0) = \ln(2013) \approx 7,61 \Rightarrow S_y(0 | \ln(2013))$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2013 - x = 1 \Rightarrow x = 2012 \Rightarrow S_x(2012 | 0)$$

$$2 \quad f(x) = x \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

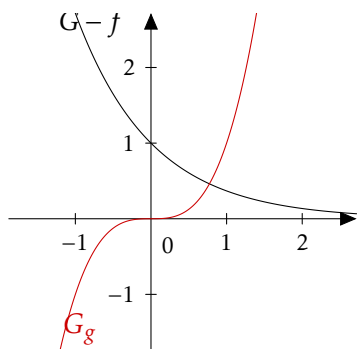
$$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x) = 2\cos(x) - x \sin(x)$$

$$f''(0) = 2 - 0 = 2$$

Der Graph ist also in unmittelbarer Nähe des Ursprungs linksgekrümmt.

$$3 \quad g: x \mapsto e^{-x}; h: x \mapsto x^3$$

a) Graph:



b)  $d(x) = e^{-x} - x^3$

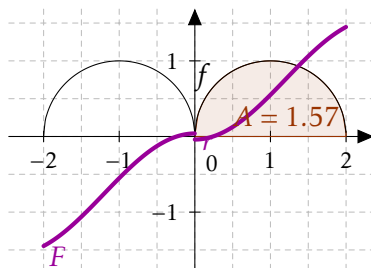
$$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$$

$x_0 = 1$ ; Startwert in Naherungsformel

$$x_1 = x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)} = 1 - \frac{\frac{1}{e} - 1}{-\frac{1}{e} - 3} \approx 0,81$$

4 a)  $F(0) = 0; F(2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}; F(-2) = -\frac{\pi}{2};$

b) Graph:



## Teil 2

1  $f \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$

a) Senkrechte Asymptote:  $x = -1$

Schräge Asymptote:  $a(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Schnittstellen mit der schrägen Asymptote:  $f(x) - a(x) = \frac{8}{x+1} \neq 0 \Rightarrow$  keine!

b)  $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}$

$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{(x+1)^2}$$

$$16 = (x+1)^2 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 3$$

$$\text{Lage: } f(-5) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{-4} = -3 - 2 = -5$$

$$\text{und } f(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$$

Art:  $f''(-5) < 0 \Rightarrow$  Maximum.

und  $f''(3) > 0 \Rightarrow$  Minimum.

2 a)  $g(x)$  geht durch Verschiebung um 1 in positiver x-Richtung und Verschiebung um 1 in positiver y-Richtung aus  $f(x)$  hervor:

$$g(x) = f(x-1) + 1 = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1-1} + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x} + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{8}{x} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$$

Punktsymmetrie:

$$g(-x) = -\frac{1}{2}x + \frac{8}{-x} = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$$

punktsymmetrisch ✓

b)  $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}\right) dx$   
 $= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8\ln(x+1)\right]_0^4$

$$= 4 - 2 + 8 \cdot \ln 5 - (0 - 0 + 8 \ln 1) = 2 + 8 \cdot \ln 5 \checkmark$$

Wegen der Punktsymmetrie zu  $M(-1|-1)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{-2} f(x) dx &= - \int_1^5 f(x) dx - 2 \cdot (6 - 2) \\ &= -10 - 8 \cdot \ln 5 \end{aligned}$$

3 a)  $f(0) = 8 - \frac{1}{2} = 7,5$

Die leere Dose ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt, deshalb liegt ihr Schwerpunkt genau in der Mitte, also auf halber Höhe.

$$f(15) = 7,5 - 0,5 + \frac{8}{16} = 7,5$$

Die volle Dose hat ihren Schwerpunkt ebenfalls in der Mitte.

- b) Mit steigender Füllhöhe sinkt der Schwerpunkt zuerst von 7,5 cm aus nach unten. Bei einer Füllhöhe von 3 cm hat der Schwerpunkt seinen niedrigsten Wert erreicht und steigt anschließend mit steigender Füllhöhe, bis er die 7,5 cm wieder erreicht hat.

Nachdem  $x$  für die Füllhöhe und  $y$  für die Höhe des Schwerpunkts steht, stimmt bei 3 cm Höhe der Schwerpunkt genau mit der Höhe des Flüssigkeitsspiegels überein.

- c) Wegen der Schwerpunktshöhe von maximal 5 cm sollte man die Konstante  $y = 5$  in das Koordinatensystem eintragen. Alle  $x$ -Werte für die der Graph mit der Geraden übereinstimmt, oder für die der Graph unterhalb der Geraden liegt sind diejenigen bei denen der Schwerpunkt kleiner oder gleich 5 cm ist. Aus der Graphik liest man ab:

$$0,5 \leq x \leq 9,5$$

Rechnung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5 \quad | \cdot 2(x+1)$$

$$x \cdot (x+1) - (x+1) + 16 \leq 10(x+1)$$

$$x^2 + x - x - 1 + 16 \leq 10x + 10$$

$$x^2 - 10x + 5 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53; x_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47$$