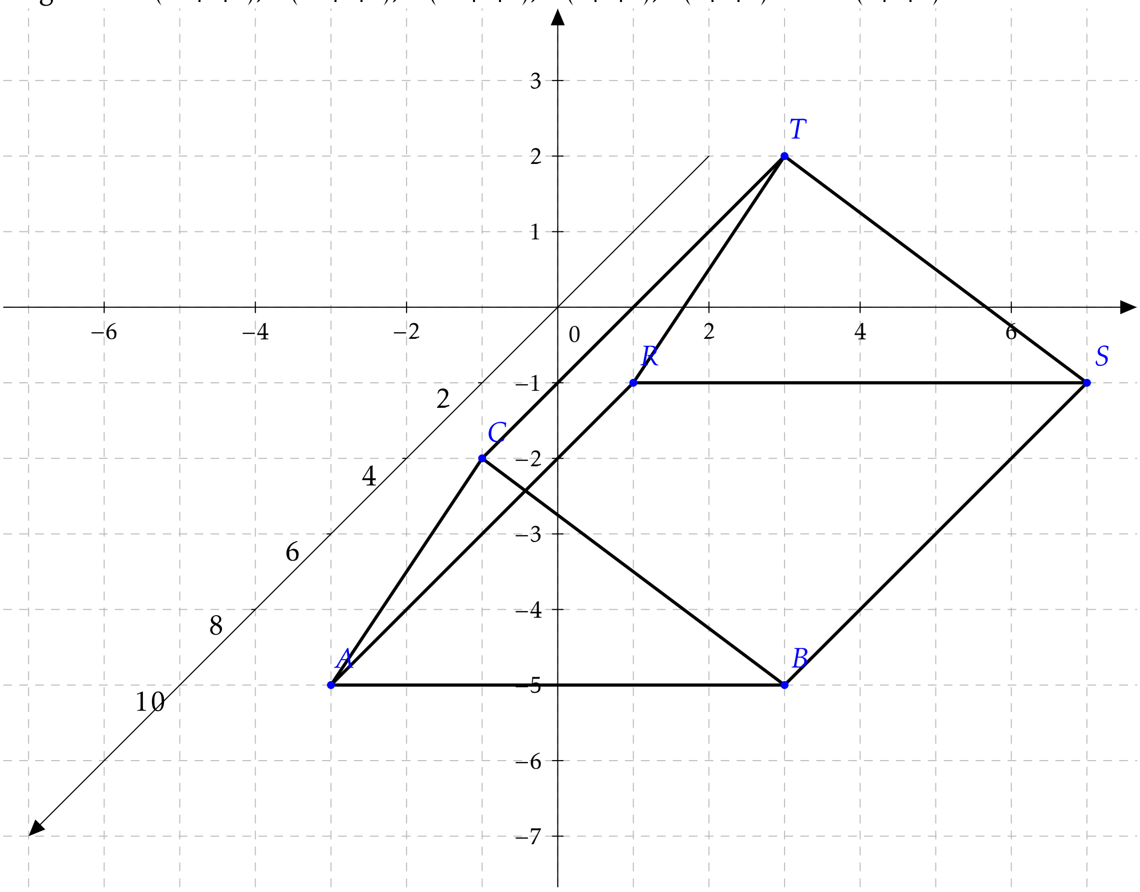
Abi 12 Lsg Geo II 1

a) Gegeben: A(10|2|0), B(10|8|0), C(10|4|3), R(2|2|0), S(2|8|0) und T(2|4|3)



Die Punkte A, B und C besitzen alle die gleiche x_1-Koordinate. Also ist die Grundfläche ΔABC parallel zur x_2x_3-Ebene.
Volumen des Prismas: $V = G \cdot h$
G ist wiederum die Fläche des Dreiecks ABC, dessen Flächeninhalt sich leicht aus dem Koordinatensystem erschließt:
Nimmt man [AB] als Grundlinie, dann gilt $g = 6; h' = 3; \Rightarrow G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$
Die Höhe h des Prismas beträgt $h = 8$, also gilt: $V = 9 \cdot 8 = 72$

b) Nehmen wir als Aufpunkt B und von dort aus die Vektoren nach S und nach C, dann ergibt sich folgende PaFo von E:

$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder einfacher:

$$E:\vec{X}=\begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$$

Normalenvektor mit Hilfe des Vektorproduktes:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

$-3x_2-4x_3-n_0=0$

Aufpunkt einsetzen:

$-3\cdot 8-4\cdot 0-n_0=0$

$-24-n_0=0\Rightarrow n_0=-24$ Das führt zur KoFo:

$E:-3x_2-4x_3+24=0$

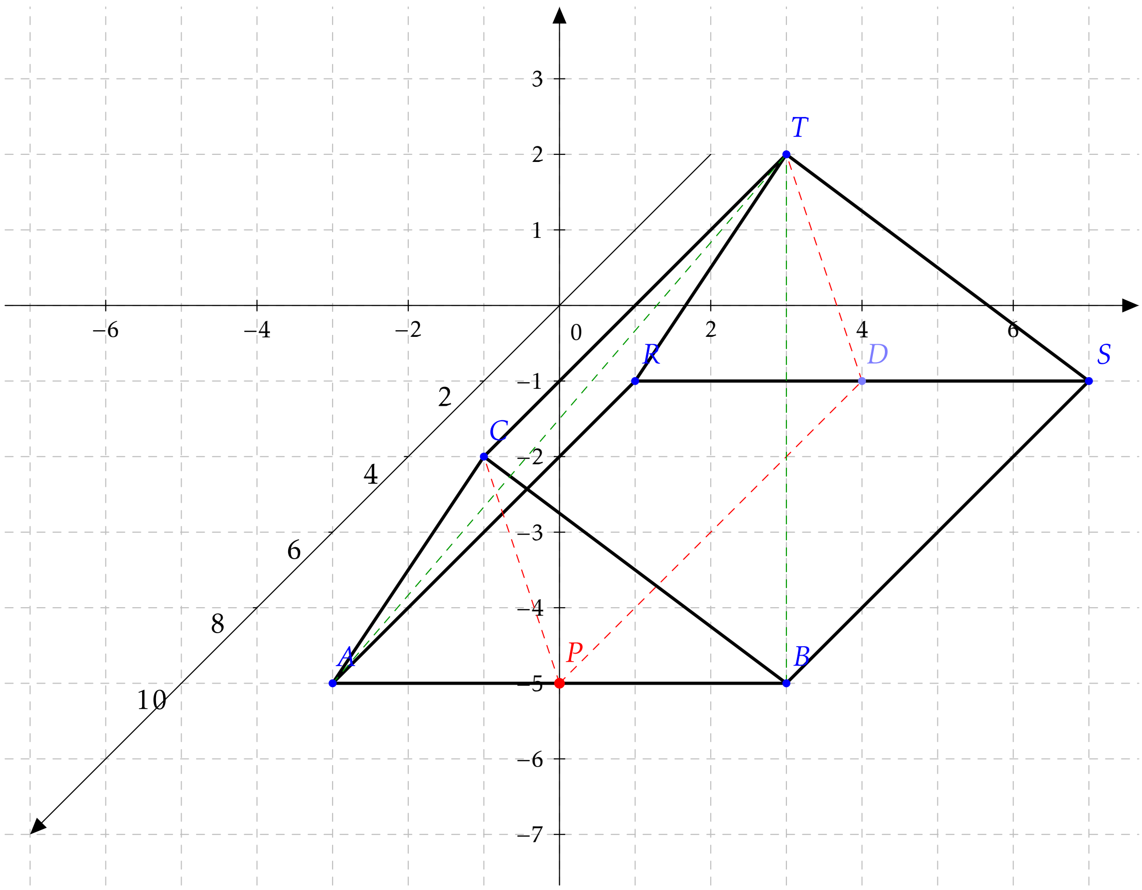
entspricht dem Zwischenergebnis bis auf die Vorzeichen.

c) $cos(\psi)=\frac{\vec{CA}\circ\vec{CB}}{\left|\vec{CA}\right|\cdot\left|\vec{CB}\right|}$

$$\vec{CA}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix};\left|\vec{CA}\right|=\sqrt{13};\vec{CB}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix};\left|\vec{CB}\right|=\sqrt{25}=5;$$

$cos(\psi)=\frac{0-8+9}{\sqrt{13}\cdot 5}=0,05547\Rightarrow\psi\approx 86,8$

d) Um das Volumen zu halbieren muss die Dreiechsgrundfläche ABC halbiert werden. Sinnvoll ist es deshalb die Grundlinie zu halbieren und den Punkt P auf die Mitte zwischen A und B zu legen. Daraus ergeben sich zwei Grundflächen gleichen Inhalts, die darüberliegenden Teilprismen müssen also auch den gleichen Volumeninhalt besitzen.



e) Es handelt sich bei dem entstehenden Körper um ein Pyramide. Da diese die gleiche Höhe wie das Prisma besitzt, deren Volumen allerdings nur $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ beträgt, ergibt sich insgesamt ein Verhältnis von 1:2 für die beiden entstandenen Teilkörper des Prismas.

f) Der Abstand des Punktes M von der Ebene E, die durch das Rechteck BSTC aufgespannt wird, entspricht dem Radius der gesuchten Kugel.
Benötigt wird also die Hesse-Normalform von E:
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$
Also lautet die Hessenormalform von E:

$E : \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{24}{5}$

Nun wird M eingesetzt:

$\frac{3}{5} \cdot 6,5 + \frac{4}{5}3 - \frac{24}{5} = \frac{7,5}{5} = 1,5$

Berechnung der Position von W: Addiere zum Punkt M das -1,5-fache des Normaleneinheitsvektors:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}$$

g) Definiere die Gleichung der Geraden auf der der Mittelpunkt entlang läuft:
Aufpunkt ist M, die Richtung ist parallel zu $\vec{CB}$

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wenn die Kugel den Fußboden erreicht, dann muss sich der Kugelmittelpunkt auf der Höhe $x_3 = 1,5$ befinden, betrachte also folgende Gleichung für die x_3-Koordinate:

$$3 - 3\lambda = 1,5 \Rightarrow \lambda = 0,5$$

Der Weg entspricht also der halben Länge des Richtungsvektors:

$s = 0,5 \cdot \left|\vec{CB}\right| = 2,5$ (mit den Ergebnissen aus den vorhergenden Aufgaben)