Abiturprüfung 2008

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

Falls das Thema GM1.II gewählt wird, ist die Angabe vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

Name:____

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{8x}{x^2+4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

5 1. a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Nullstelle von f an.

7 b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

[Teilergebnis: Hochpunkt $(2|2)$]

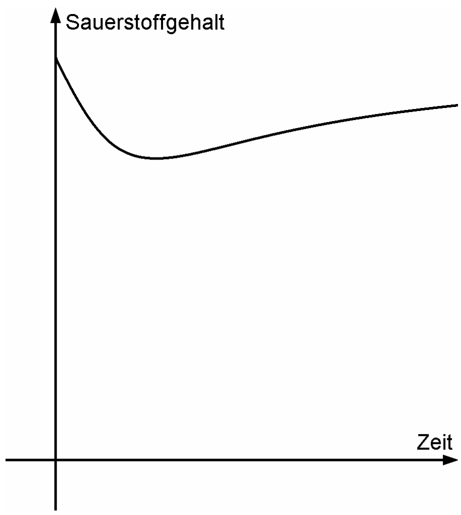
5 c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Ursprung. Berechnen Sie $f(1)$ sowie $f(6)$ und skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \le x \le 6$.

3 d) Begründen Sie, dass f im Intervall $[-2;2]$ umkehrbar ist. Tragen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein.

Die Funktion $F : x \mapsto 4\ln(x^2+4)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

7 e) Der Graph von f und der Graph der Umkehrfunktion g schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieses Flächenstücks.

2. Unmittelbar nach der einmaligen, kurzzeitigen Einleitung von Abwasser in einen See kommt es zu einem Absinken des Sauerstoffgehalts im See. Da die Abwasserbelastung nicht zu hoch ist, führt die Selbstreinigung des Sees schließlich wieder zu einer Erhöhung des Sauerstoffgehalts.



Die Funktion $h : x \mapsto 8 - f(x)$, $D_h = \mathbb{R}_0^+$, beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees an der Einleitungsstelle. Dabei ist x die Anzahl der seit Einleitung des Abwassers vergangenen Tage, h(x) die Maßzahl des Sauerstoffgehalts in $\frac{mg}{\ell}$.

Die Abbildung veranschaulicht den Verlauf des Graphen von h.

(Fortsetzung nächste Seite)

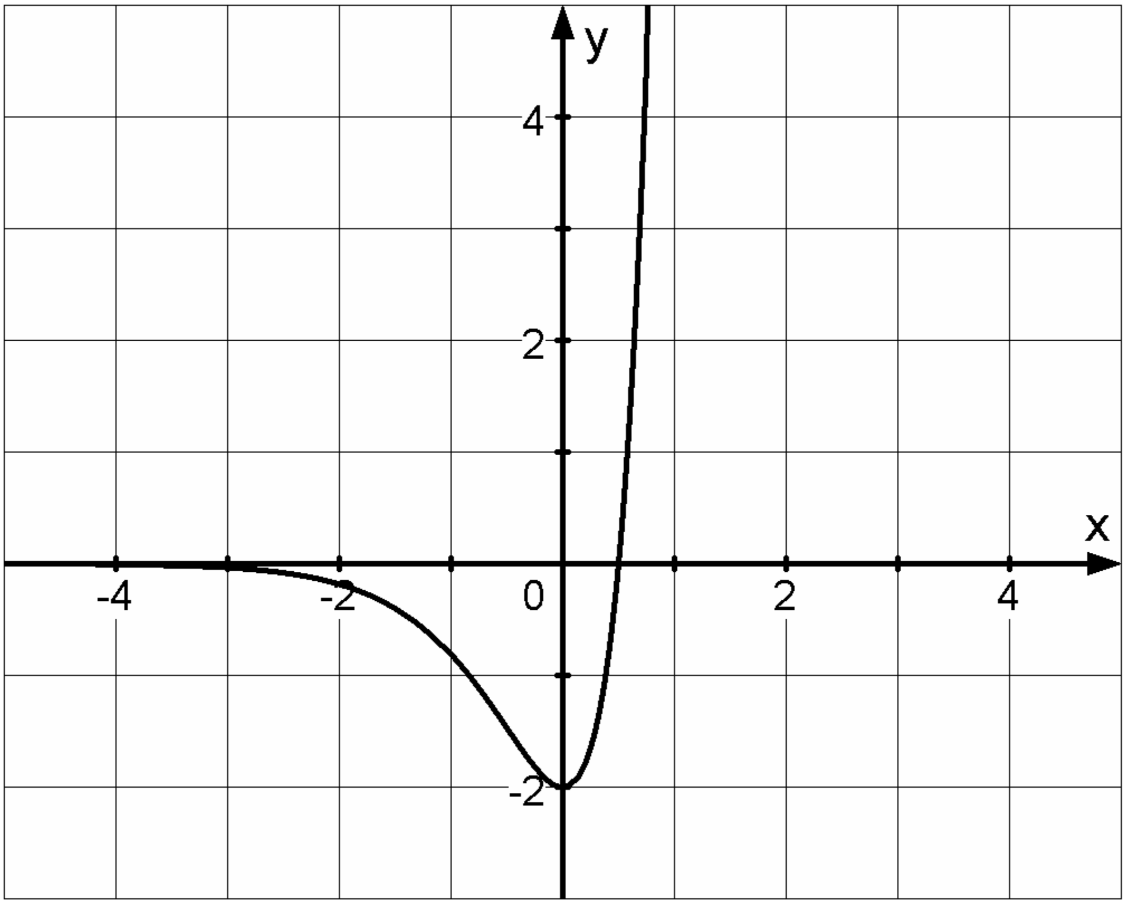
BE	
4	a) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f hervorgeht. Nach wie vielen Tagen erreicht der Sauerstoffgehalt seinen kleinsten Wert und wie hoch ist dieser?
5	b) Berechnen Sie, wann der Sauerstoffgehalt wieder auf 95 % des ursprünglichen Wertes angestiegen ist.
4	c) Der mittlere Sauerstoffgehalt (in $\frac{\text{mg}}{\ell}$) an der Einleitungsstelle ist für einen Zeitraum von 20 Tagen nach Einleitung des Abwassers gegeben durch $\frac{1}{20}\int_0^{20} h(x)\,dx$. Bestimmen Sie damit den mittleren Sauerstoffgehalt für diesen Zeitraum.
40	

Name:________________________
(vom Prüfling einzutragen)

BE

II.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der Funktion $g: x \mapsto (4x-2) \cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$.



5 1. a) Berechnen Sie die Nullstelle von g.
G_g besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich).
Berechnen Sie dessen Koordinaten. [Zur Kontrolle: $g'(x) = 8xe^{2x}$]

9 b) Weisen Sie nach, dass G_g genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. Tragen Sie diese in obige Abbildung ein. [Zur Kontrolle: $w: y = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$]

5 c) Gegeben ist die Integralfunktion $I: x \mapsto \int_0^x g(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Für verschiedene Werte von x wird jeweils das Vorzeichen von I(x) betrachtet. Was kann hierüber ohne Rechnung im Bereich $0 < x \le 0{,}5$ ausgesagt werden, was im Bereich $x > 0{,}5$? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne eine integralfreie Darstellung von I zu verwenden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto (-4x-2)\cdot e^{-2x}$ mit Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}$ und zugehörigem Graph G_h.

6 2. a) Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h, dass man G_h erhält, indem man G_g an der y-Achse spiegelt. Zeichnen Sie G_h in die Abbildung ein.
Geben Sie die Gleichung der Wendetangente von G_h an.

5 b) Die Funktion $G: x \mapsto (2x-2)\cdot e^{2x}$ mit $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Die Schnittpunkte der Graphen G_g bzw. G_h mit der x-Achse werden mit N bzw. M bezeichnet.
Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von der Strecke [MN] sowie den Graphen G_g und G_h eingeschlossen wird.
(Hinweis: G_g und G_h schneiden sich nur auf der y-Achse.)

3. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto (2ax-2)\cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3 a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h Funktionen der Schar sind, indem Sie die zugehörigen Parameterwerte a angeben.
Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden.

3 b) Jede Funktion der Schar hat genau eine Wendestelle und zwar bei $x = -\frac{1}{a}$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen p zur x-Achse liegen, und geben Sie die Gleichung von p an.

4 c) Die Wendetangente jedes Graphen der Schar schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Für bestimmte Werte von a ist dieses Dreieck gleichschenklig.
Beschreiben Sie einen Weg, um diese Werte von a rechnerisch zu ermitteln (Rechnungen nicht erforderlich).

40

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Bei der neuen Fernsehshow „Insel-Camp“ nehmen 7 Frauen und 7 Männer als Kandidaten teil.

1. Für die Fahrt zur Insel stehen drei Boote zur Verfügung, eines für 8, eines für 4 und eines für 2 Personen.

3 a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 14 Kandidaten so aufzuteilen, dass jedes der drei Boote voll besetzt ist?

5 b) Die Zuschauer haben aus den Kandidaten Judith für das 8er-Boot, Sabine für das 4er-Boot und Laura für das 2er-Boot als Bootsführer bestimmt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Bootsmannschaften für die gemeinsame Fahrt zur Insel zu vervollständigen, wenn in jedem Boot gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen?

2. Beim Spiel „Schatzsuche“ muss ein Kandidat abgesperrte Truhen öffnen. Bei jeder Truhe stehen dafür 6 sehr ähnliche, aber dennoch verschiedene Schlüssel zur Auswahl, von denen 4 nicht zum Schloss passen. Mit jedem einzelnen der beiden anderen Schlüssel lässt sich das Schloss entriegeln. Pro Truhe darf der Kandidat 2 verschiedene Schlüssel ausprobieren, die er zufällig auswählt.

5 a) Bestätigen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, dass bei einer Truhe die Wahrscheinlichkeit für das Öffnen 60 % beträgt.

5 b) Wie viele Truhen müssen in diesem Spiel mindestens zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens eine Truhe geöffnet wird?

5 c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Von 15 Truhen werden genau 7 geöffnet.“

B: „Von 15 Truhen werden mehr als 10 geöffnet.“

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Beim Spiel „Perlentauchen“ darf ein Kandidat eine von 300 Muscheln öffnen. 55 % der Muscheln sind außen golden gefärbt, der Rest ist außen schwarz. In 24 % aller Muscheln ist eine Perle enthalten, die übrigen sind leer. 32 % der Muscheln sind weder goldfarben, noch enthalten sie eine Perle.

4 a) Wie viele goldfarbene Muscheln enthalten keine Perle?

3 b) Eine Muschel wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „goldfarben“ und „enthält Perle“ stochastisch unabhängig sind.

4 c) Ist es für den Kandidaten aussichtsreicher, eine goldene oder eine schwarze Muschel zu öffnen, um eine Perle zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

6 4. Der Produzent will eine Fortsetzung der Fernsehshow nur dann finanzieren, wenn mehr als 75 % der „Insel-Camp“-Zuschauer dies befürworten. Die Entscheidung für oder gegen eine Fortsetzung soll mit Hilfe einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Zuschauern dieser Sendung gefällt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung irrtümlich fortgesetzt wird, soll höchstens 5 % betragen. Geben Sie die zugehörige Entscheidungsregel an, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Absetzen möglichst klein ist.

40

BE

IV.

Eine neue Limonade „BioFrucht“ erobert den Getränkemarkt. BioFrucht wird in vier Sorten hergestellt: Apfel (A), Brombeere (B), Citro (C) und Dattel (D).

1. Der Hersteller von BioFrucht hält eine Werbekampagne für unnötig, weil er vermutet, dass der Bekanntheitsgrad p seiner Limonade mindestens 40 % beträgt. Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Personen befragt. Der Hersteller will von seiner Vermutung $p \geq 0{,}4$ abrücken und eine Werbekampagne mit kostenlosen Getränkeproben starten, wenn bei der Umfrage weniger als 70 Personen angeben, BioFrucht zu kennen.

4 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Getränkeproben verteilt werden, obwohl der Bekanntheitsgrad von BioFrucht tatsächlich nur 30 % beträgt?

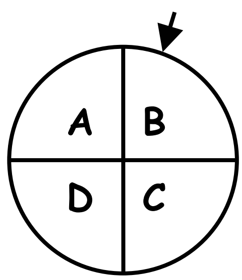
4 b) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hersteller unnötigerweise Getränkeproben verteilt.

2. In einer Stadt wird die Werbekampagne durchgeführt. Dafür werden an einen Werbestand in der Fußgängerzone gemischte BioFrucht-Getränkekästen angeliefert, die je 5 Flaschen der Sorten A, B, C und D enthalten. Ein Mitarbeiter der Herstellerfirma entnimmt rein zufällig 5 Flaschen aus einem zunächst vollen Kasten und verteilt diese an Passanten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

4 a) zweimal Sorte A, zweimal Sorte B und einmal Sorte D entnommen hat?

5 b) von jeder Sorte mindestens eine Flasche entnommen hat?

3. Als weiterer Teil der Werbekampagne wird in der Fußgängerzone ein Glücksrad mit 4 gleich großen Sektoren aufgebaut. Dreht ein Passant das Glücksrad, so bekommt er eine Flasche BioFrucht der angezeigten Sorte geschenkt.
10 Personen drehen nacheinander je einmal das Glücksrad.



10 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: „Genau 3 Personen erhalten je eine Flasche der Sorte D.“

F: „Mindestens 3 Personen erhalten eine Flasche der Sorte D.“

G: „3 aufeinander folgende Personen erhalten eine Flasche der Sorte D, die restlichen Personen erhalten Flaschen anderer Sorten.“

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 b) Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens eine Flasche der Sorte C verschenkt wird?

4. Um den Beliebtheitsgrad der einzelnen Sorten herauszufinden, wurde eine bayernweite Befragung durchgeführt. Dabei erhielt man unter den Personen, die eine Lieblingssorte angeben konnten, folgendes Ergebnis:

Lieblingssorte	A	B	C	D
Häufigkeit der Nennung	12 %	18 %	28 %	42 %

2 a) 204 Personen gaben als Lieblingssorte Apfel an. Wie viele Personen nannten Dattel als Lieblingssorte?

6 b) Im Folgenden werden nur die befragten Personen betrachtet, die eine Lieblingssorte angegeben haben. Unterscheidet man diese Personen nach ihrem Geschlecht, so ergibt sich folgendes Bild:
10 % sind weiblich und haben Dattel als Lieblingssorte. 25 % sind männlich und haben eine andere Lieblingssorte als Dattel.
Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Eine zufällig ausgewählte Person hat die Lieblingssorte Dattel“ und „Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich“ auf stochastische Unabhängigkeit.

40

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE	V.
	In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P(-8\,|\,-4\,|\,1)$ und $Q(7\,|\,8\,|\,17)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.
2	1. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Geraden g liegt.
6	b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält, in Normalenform. Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem? [mögliches Teilergebnis: $E: 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$]
6	c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(7\,|\,-4\,|\,1)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Geraden g. [Ergebnis: $d = 20$]
2	d) Der Punkt Q' entsteht durch Spiegelung des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'. [Ergebnis: $Q'(7\,|\,-16\,|\,-15)$]
9	e) Begründen Sie, dass das Viereck $QPQ'R$ eine Raute ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q', R und F veranschaulicht. Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.
8	f) Berechnen Sie alle Innenwinkel der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten. [Teilergebnis: $h = 24$]
	2. In der Ebene E liegt ein Gitter mit kongruenten rautenförmigen Öffnungen. Eine dieser Rauten ist das Viereck $QPQ'R$. Zudem ist eine Kugel mit Radius r = 13 gegeben.
2	a) Begründen Sie, dass diese Kugel nicht durch die Gitteröffnungen passt.
5	b) Die Kugel liegt so in der Öffnung $QPQ'R$, dass sie alle 4 Seiten dieser Raute berührt. Berechnen Sie den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Gitterebene E.
40	

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(1|2|0)$, $B(3|0|2)$ und $C(5|5|2)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest. Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

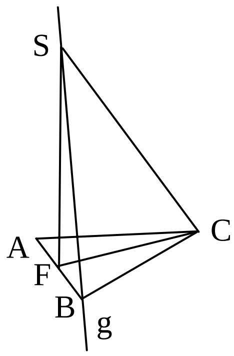
7 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie alle Innenwinkel dieses Dreiecks.

5 b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(2|1|1)$ Mittelpunkt der Strecke [AB] ist, und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

[mögliches Ergebnis: $G: x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$]

4 c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene G.

[Ergebnis: $S(-3|3|8)$]



6 d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht, und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreis in der Ebene G mit Durchmesser [SC] liegt.

5 2. a) Bei der Rotation des rechtwinkligen Dreiecks FCS um die Achse FS entsteht ein gerader Kegel K_1. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

6 b) Der Kegel K_1 schneidet die Ebene G im Dreieck CSC^*. Berechnen Sie die Koordinaten von C^* und zeichnen Sie das Dreieck CSC^* in wahrer Größe (1 LE entspricht 1 cm; sinnvolle Rundung der Längen).

4 c) Es sei r der Radius der größten Halbkugel mit Grundfläche in E, die dem Kegel K_1 einbeschrieben werden kann.
Beschreiben Sie einen Weg zur rechnerischen Bestimmung von r (Rechnungen nicht erforderlich).

3 d) Lässt man das Dreieck FCS um die Achse FC rotieren, so entsteht ein Kegel K_2.
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Schlussfolgerung falsch ist: „Weil bei K_2 im Vergleich zu K_1 Höhe und Grundkreisradius nur vertauscht sind, müssen K_1 und K_2 das gleiche Volumen besitzen.“

40